CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE TENSÕES RESIDUAIS EM ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Flávio Assumpção de Castro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Orientador:
Paulo Pedro Kenedi, D.Sc.

Rio de Janeiro
Setembro/2018

ANÁLISE DE TENSÕES RESIDUAIS EM ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Flávio Assumpção de Castro

Aprovado por:

_____

Presidente, Prof. Paulo Pedro Kenedi, D.Sc. (Orientador)

_____

Professor Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco, D.Sc.

_____

Professora Lavínia Maria Sanabio Alves Borges, D.Sc. (UFRJ)

Rio de Janeiro
Setembro/2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

C1037 Castro, Flávio Assumpção
Análise de tensões residuais em estruturas hiperestáticas/Flávio Assumpção de Castro.-2017.
ix, 68f.: Il.color., grafs., tabs.; enc.

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2017.
Bibliografia: f.63-65
Orientador: Paulo Pedro Kenedi

1. Engenharia Mecânica. 2. Tensões residuais. 3. Estruturas hiperestáticas. 4.Plasticidade. I. Kenedi, Paulo Pedro (Orient.). II. Título

CDD 620

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e às minhas irmãs, por todo o carinho e dedicação.

À minha esposa e aos meus amigos, por todo o apoio.

Ao meu orientador, por toda a ajuda dispensada e pela compreensão.

RESUMO

ANÁLISE DE TENSÕES RESIDUAIS EM ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Flávio Assumpção de Castro

Orientador:
Paulo Pedro Kenedi, D.Sc.

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais.

Estruturas hiperestáticas apresentam redundância nos seus pontos de apoio e, por isso, não podem ser completamente definidas pelas equações de equilíbrio de momentos e de forças, necessitando de equações relacionadas com a compatibilidade geométrica para as definir por completo. Essas estruturas são capazes de suportar a plastificação de várias seções transversais sem entrar em colapso, desde que o número de seções plastificadas não exceda seu grau de hiperestaticidade.

O objetivo principal do presente trabalho é desenvolver uma formulação analítica, utilizando material elástico perfeitamente-plástico, para o cálculo da distribuição de tensões residuais em seções transversais de estruturas hiperestáticas. Nessa modelagem, foi usada a análise elasto-plástica incremental da estrutura para obter os momentos fletores nas variadas configurações da estrutura durante o carregamento. Nesse método, ao elevar a carga de solicitação até um valor maior do que a carga de geração de cada rótula plástica, a estrutura perde o grau de liberdade correspondente, mudando sua distribuição de momentos fletores e de tensões. Ao descarregar a estrutura, pode-se obter os momentos fletores residuais em qualquer seção transversal da viga, bem como a sua respectiva distribuição de tensões residuais nestas seções transversais.

Assim, o trabalho apresenta uma metodologia para obter a distribuição de tensões residuais em qualquer seção transversal de estruturas hiperestáticas, em particular de uma viga biengastada, para uma carga concentrada aplicada de forma monótona.

Palavras-chave:

Tensões residuais; estruturas hiperestáticas; plasticidade.

Rio de Janeiro
Setembro/2018

ABSTRACT

ANALYSIS OF RESIDUAL STRESSES IN HYPERSTATIC STRUCTURES

Flávio Assumpção de Castro

Advisor:
Paulo Pedro Kenedi, D.Sc

Abstract of dissertation submitted to Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, as partial fulfillment of requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering and Materials Technology.

Hyperstatic structures have redundant points of support and, because of it, they can't be completely defined by the equations of the force and momentum equilibrium. These structures can bear plastic moment on many cross sections until they reach their hyperstatic degree, when the structure collapses.

The main purpose of this work is to develop an analytical formulation to calculate the distribution of residual stresses on hyperstatic structures, using elastic perfectly plastic material. In this model, Incremental Elastoplastic Analysis is used to obtain the bending moment on the cross sections in the settings of the structures during the loading. With this method, the structure loses one degree of freedom when the load raises to the load of each plastic hinge generates, changing the distribution of bending moments and stresses. With the springback of the structure, residual moments at every cross section and their residual stress at every point can be calculated.

Thus, this work presents a method to obtain the distribution of residual stress at each cross section of hyperstatic beams, in particular of a beam fixed at both ends and subjected to a monotonous concentrated force.

Keywords: Residual stress; Hyperstatic structures, Plasticity.

Rio de Janeiro
September/2018

Sumário

Capítulo I - Introdução 1
Capítulo II – Revisão Bibliográfica 3
Capítulo III – Conceitos Básicos 12
Capítulo IV – Introdução aos métodos analíticos de análise plástica 22
Capítulo V – Aplicação do método incremental ao problema de uma viga biengastada 30
Capítulo VI – Distribuição das tensões residuais nas seções transversais com rótulas plásticas 46
Capítulo VII – Conclusões 56
Referências Bibliográficas 58
APÊNDICE A 61

Lista de Figuras

Figura I-1 – Tensão residual em elo de amarra 1
Figura I-2 – Estrutura biengastada com carga concentrada 2
Figura II-1 – deformação vertical da chapa após soldagem 3
Figura II-2 – Tensões térmicas durante a soldagem e tensões residuais 4
Figura II-3 – Tensões residuais em soldas multipasse 5
Figura II-4 – Corpo de prova de junta aparafusada 5
Figura II-5 – Deformações usando o Método de Grid e usando M.E.F. 6
Figura II-6 – Ensaio para obtenção de tensões residuais em flexão.....8
Figura II-7 – modelo ensaiado por BIN 9
Figura II-8 – regiões plásticas e elásticas 9
Figura II-9–Comparação entre métodos 10
Figura II-10 – Estruturas estudadas por STOK 10
Figura II-11 – zona plástica e zona elástica 11
Figura III-1 – Gráfico tensão vs deformação de engenharia.....12
Figura III-2 – Diagrama tensão vs deformação de um material elástico perfeitamente plástico.....13
Figura III-3– Efeito na distribuição de tensões normais, em uma seção transversal retangular, em função do aumento do carregamento de momento fletor 14
Figura III-4 – Dimensões de uma seção transversal retangular parcialmente plastificada.....15
Figura III-5 – Viga submetida à flexão pura 15
Figura III-6 – Seção transversal parcialmente plastificada 16
Figura III-7 – (a) Viga biapoiada com carga concentrada, (b) diagrama de momento fletor e (c) formação de rótula plástica em *C* 17
Figura III-8 – Distribuição das deformações e tensões em viga parcialmente plastificada carregada com momento fletor negativo 18
Figura III-9 – Distribuição de tensões em uma seção transversal: (a) Carregamento, (b) descarregamento (*springback*) e (c) tensões residuais resultantes. 21
Figura IV-1 – Desenho Esquemático de uma viga biengastada com carga concentrada *P*.....24

Figura IV-2 – Distribuição de momentos fletores na carga crítica.....24
Figura IV-3 – Deslocamentos virtuais.....24
Figura IV-4 – Viga engastada-apoiada com carga centralizada 26
Figura IV-5 – Composição da viga em estruturas estáticas 27
Figura IV-6–Distribuição esquemática de momentos fletores em viga engastada-apoiada.....27
Figura IV-7 – Momentos fletores dos componentes da estrutura 27
Figura IV-8 – Composição de momentos fletores das estruturas básicas gerando o momento fletor da estrutura original 28
Figura V-1 – Viga biengastada e DCL da viga 30
Figura V-2 – Decomposição da viga biengastada 31
Figura V-3 – corte da seção para $0 \leq x \leq a$ 32
Figura V-4 – corte da seção para $a \leq x \leq L$ 32
Figura V-5 – Exemplo de diagrama de momento fletor da viga biengastada 33
Figura V-6 – D.C.L. até a 1ª rótula plástica da viga biengastada 34
Figura V-7 – D.C.L. entre a 1ª e a 2ª rótulas plásticas da viga engastada – apoiada 35
Figura V-8 D.C.L. da 2ª rótula plástica da viga engastada – apoiada 37
Figura V-9 – viga engastada, apoiada com rótula em *C* 38
Figura V-10 – Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_1.....41
Figura V-11 – Distribuição de regiões plastificadas na viga para P_1 42
Figura V-12 - Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_2 43
Figura V-13 – Distribuição de espessura do núcleo elástico para P_2.....44
Figura V-14 - Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_3 45
Figura V-15 – Distribuição de espessura do núcleo elástico para P_3 45
Figura VI-1 – Tensões na seção *A* para o primeiro carregamento crítico P_1.....46
Figura VI-2 – Tensões na seção *C* para o primeiro carregamento crítico P_1.....47
Figura VI-3 – Tensões na seção *B* para o primeiro carregamento crítico P_1.....48
Figura VI-4 – Tensões na seção *A* para carregamento entre P_1 e P_2.....48
Figura VI-5 – Tensões na seção *C* para carregamento entre P_1 e P_2 49
Figura VI-6 – Tensões na seção *B* para carregamento entre P_1 e P_2 49
Figura VI-7 – Tensões na seção *A* para o segundo carregamento crítico P_2 50
Figura VI-8 – Tensões na seção *C* para o segundo carregamento crítico P_2.....51

Figura VI-9 – Tensões na seção *B* para o segundo carregamento crítico P_2.....51
Figura VI-10 – Tensões na seção *A* para carregamento entre P_2 e P_3.....52
Figura VI-11 – Tensões na seção *C* para carregamento entre P_2 e P_3.....52
Figura VI-12 – Tensões na seção *B* para carregamento entre P_2 e P_3.....53
Figura VI-13 – Resumo da distribuição das tensões residuais para diferentes carregamentos em diferentes seções transversais.....54

Capítulo I - Introdução

Todo corpo que sofre deformações plásticas pode estar sujeito às tensões residuais, mesmo com o término do carregamento externo [1]. Isso se deve ao desenvolvimento de uma distribuição de deformações plásticas não-homogêneas.

Por estarem presentes como resultado de todos os processos de fabricação [2], as tensões residuais são um importante objeto de estudo, principalmente porque podem afetar de forma bastante significativa a vida útil de equipamentos.

Alguns componentes mecânicos sofrem plastificações totais ou parciais das suas seções transversais durante testes iniciais após a fabricação. Exemplos desse caso são os elos de amarra utilizados em ancoragem de navios e plataformas de petróleo [3]. Para garantir a segurança dos elos, os mesmos são testados sob ação de cargas elevadas, o que leva o material a escoar, chegando ao regime plástico. Após a retirada da carga de teste, os elos apresentam tensões e deformações residuais. Na Fig.I-1, pode-se observar a distribuição de tensões residuais em um elo de amarra, após este ter sido submetido ao teste de tração de controle de qualidade (*proof load*). As regiões em vermelho apresentam tensões residuais trativas enquanto as em azul apresentam tensões residuais compressivas.

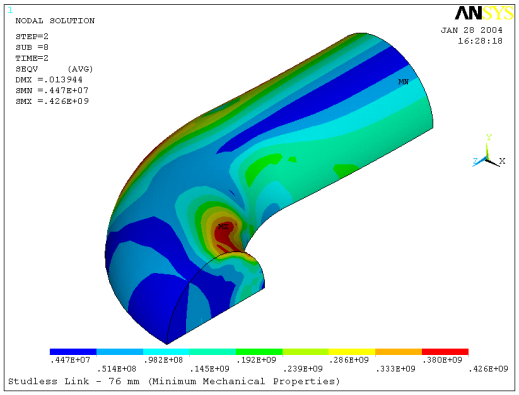


Figura I-1 – Tensão residual em elo de amarra [3]

Essa distribuição de tensões residuais se deve ao fato do descarregamento da solicitação ser elástico, gerando pontos com tensões trativas e compressivas no interior das seções, que se somam algebricamente à distribuição de tensões geradas durante o seu carregamento.

Devido à importância e à complexidade da análise das tensões residuais em Engenharia Mecânica, é fundamental buscar métodos para estimar a distribuição das tensões residuais em um maior número de casos, principalmente em estruturas hiperestáticas, que apresentam redundâncias e conseguem permanecer operacionais mesmo com algumas seções transversais totalmente plastificadas [4].

Essas estruturas só entram em colapso após atingir o número de seções transversais totalmente plastificadas (rótulas plásticas) igual ao seu grau de hiperestaticidade mais um. Com isso, sua vida útil pode ser consideravelmente maior do que uma estrutura estática semelhante [5].

O presente trabalho tem como objetivo obter uma formulação analítica para estimar a distribuição de tensões residuais em seções transversais de uma viga biengastada para carregamentos monótonos, seguidos de descarregamento. Para alcançar esse objetivo, será estudada, em detalhes, uma estrutura biengastada com uma força transversal de módulo P concentrada aplicada na seção *C*, distante *a* da seção de engaste esquerdo *A*, conforme a Fig.I-2.

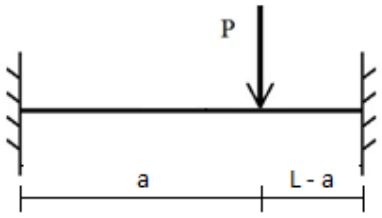


Figura I-2 – Estrutura biengastada com carga concentrada

No próximo capítulo uma revisão bibliográfica será apresentada.

Capítulo II – Revisão Bibliográfica

Este capítulo mostra o avanço atual nas pesquisas relacionadas aos estudos de tensões e deformações residuais, escoamento total e parcial da seção transversal, estruturas hiperestáticas e como esses temas se relacionam.

As tensões residuais podem ser definidas como as tensões inter-equilibradas quando a estrutura está já está sujeita à carga nula, após cessar a sua solicitação. Elas podem surgir a partir de um gradiente de temperatura ou mesmo devido às deformações elasto-plásticas não uniformes ao longo do volume do material, tal como o escoamento parcial da seção reta [5].

As tensões residuais estão presentes em todos os processos de fabricação, conformação ou união de elementos[2]. No processo de união por soldagem, o gradiente de temperatura também é uma fonte de geração de tensões e deformações residuais. OKANO [6] mostrou experimentalmente que o comportamento de distorção devido ao transiente de temperatura durante as soldagens utilizando tungstênio como gás inerte (TIG) deve ser levado em consideração para prever de forma mais eficiente as deformações e tensões residuais e controlar grandes distorções induzidas pela soldagem em chapas finas de aço.

Na Fig. II.1, por exemplo, mostra-se a soldagem de duas chapas. O cordão de solda é realizado no eixo x, entre elas. Em uma das chapas, é apresentada a deformação vertical após soldagem. As regiões em vermelho ou amarelo apresentam deslocamentos verticais positivos, enquanto as regiões em azul apresentam deslocamento verticais negativos, mostrando grande distorção na estrutura.

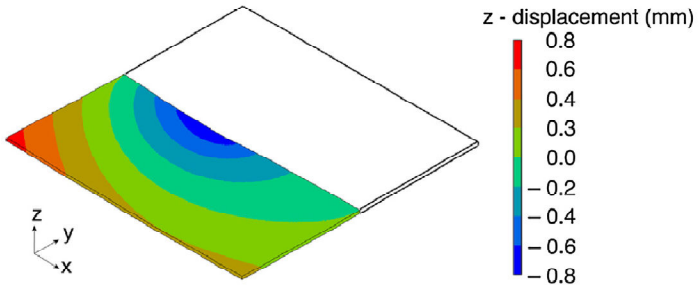


Figura II-1 – Deformação vertical da chapa pós-soldagem [6]

OKANO [6] mediu as tensões residuais pós-soldagem experimentalmente, obtendo o gráfico da Fig. II-2. Nele, pode-se observar que foram geradas tensões térmicas mesmo depois da soldagem (terminada no instante de tempo igual a 22s). Pode-se observar que tanto o lado superior quanto o lado inferior da região que sofreu soldagem apresentam tensões residuais compressivas após a soldagem.

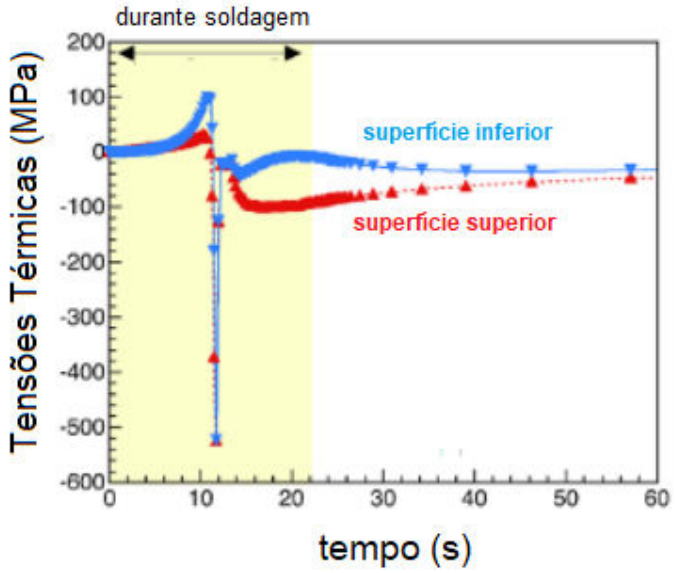
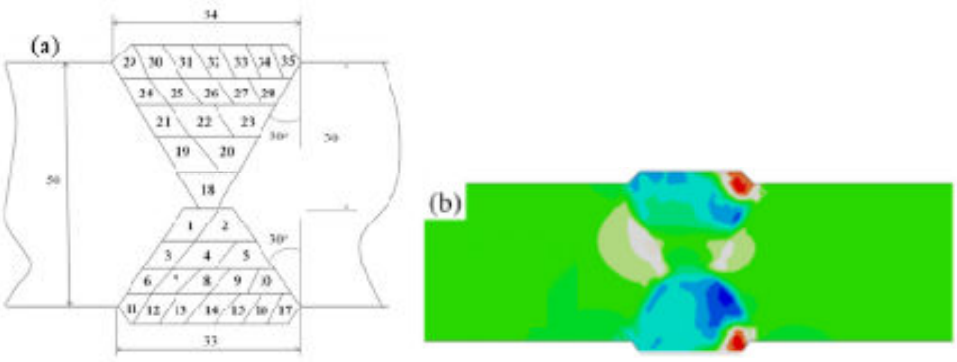


Figura II-2 – Tensões térmicas durante a soldagem e tensões residuais resultantes [6]

Ainda sobre processos de união, WANG [7] realizou simulação numérica para estudar as tensões residuais em soldas multipasses. A Fig.II-3.a apresenta a ordem dos passes de solda realizados. O processo de soldagem iniciou-se no centro da estrutura, até a sua porção inferior, terminando na parte inferior direita. Após isso, a soldagem foi realizada do centro para a porção superior, terminando também da direita. A Fig. II-3.b apresenta as tensões residuais estimadas, mostrando assim, que na região aonde foi realizada a soldagem, partes da estrutura apresentam tensões residuais trativas (representadas nas cores branca e vermelha), enquanto outras regiões apresentam tensões residuais compressivas (tons de azul).



(a) (b)

Figura II-3 – Tensões residuais em soldas multipasse [7]

Em estruturas de aço, juntas aparafusadas são comumente usadas em combinação ou não com partes soldadas. Esse tipo de conexão permite a transferência de vários tipos de esforços internos por flexão, compressão e cisalhamento. TOUSSANT [8] realizou ensaio experimental em estruturas hiperestáticas aparafusadas, conforme exemplo da Fig. II-4.

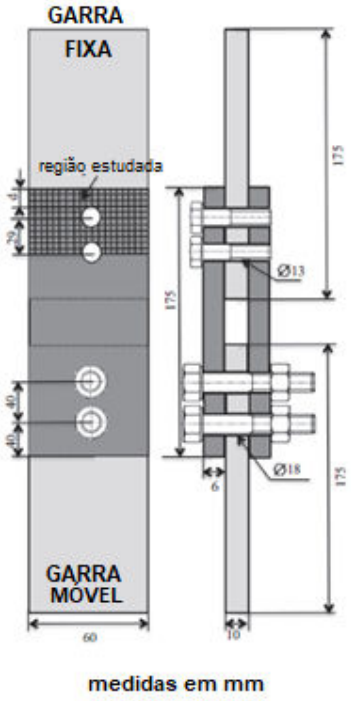
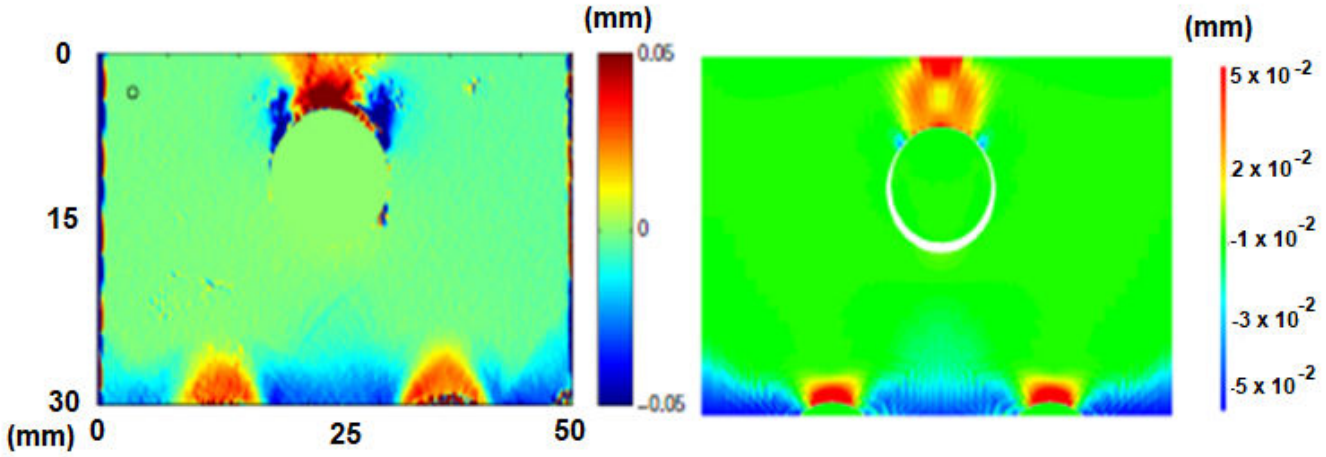


Figura II-4 – Corpo de prova de junta aparafusada [8]

Essa estrutura foi presa nas duas extremidades, sendo que a parte superior foi fixada na máquina de ensaio e a parte inferior foi deslocada para baixo.

Para mapear a distribuição de deformações durante a solicitação do material, foi utilizado o Método de Grid. Tal método consiste em fazer uma deposição de substrato polimérico, em forma de grade, na face do corpo de prova, conforme procedimento detalhado em TOUSSANT [8]. Assim, as deformações puderam ser facilmente medidas ao comparar a estrutura final deformada com as dimensões iniciais de cada quadrado pertencente à grade.

A Fig. II-5.a mostra a distribuição de deformações plotadas experimentalmente em um corpo de prova usando o citado método. Para validar a técnica experimental usada, o autor utilizou análise de Elementos Finitos para comparar com os resultados experimentais. A Fig. II-5.b mostra a análise numérica.



(a) (b)

Figura II-5 – Deformações usando o Método de Grid e usando M.E.F.

Outro campo bastante estudado em tensões residuais é a utilização do *Shot-peening*, que é um processo utilizado para produção de tensão residual compressiva, através do ataque da superfície com esferas de materiais tais como vidro, metal ou cerâmica, com força suficiente para criar deformações plásticas [9]. As tensões residuais compressivas são criadas, neste caso, intencionalmente para aumentar a vida do componente à fadiga.

BUCHANAN [10] mostrou experimentalmente a influência do *shot-peening* na distribuição de tensões, pois o aumento da dureza superficial também gera tensões

residuais. ACHINTHA [11] utilizou o método de elementos finitos para estudar a tensão residual nos materiais submetidos à técnica de *shot-peening*.

RADZIEJEWSKA [12] realizou uma análise experimental e numérica de tensão residual em estrutura de aço sujeitas a pulso de laser para introduzir deformações plásticas no material, causando o seu endurecimento superficial.

Durante a vida útil dos equipamentos, pode haver um grande número de carregamentos e descarregamentos. JIANG[13] realizou uma análise experimental com a finalidade de obter as tensões residuais em colunas de concreto sujeitas a grandes deformações durante sua vida útil. LI [14] estudou as tensões e deformações residuais em grandes equipamentos de corte em plantações de milho através do Método de Elementos Finitos.

As solicitações cíclicas também podem causar tensões residuais. Para materiais sujeitos à fadiga, HTOO [15] e XIE [16] desenvolveram uma abordagem experimental para estudar a distribuição de tensões residuais em juntas soldadas sujeitas a carregamentos cíclicos e compararam com a modelagem em elementos finitos para confirmar a validade do experimento.

Alguns componentes mecânicos sofrem plastificações totais ou parciais das suas seções transversais ainda durante o teste de controle de qualidade do equipamento. Exemplos desse caso são os elos de amarra utilizados em navio [3], como mostrado na Fig. I.1. Para garantir a segurança dos elos, os mesmos são testados sob ação de cargas elevadas, o que leva o material a escoar, chegando ao regime plástico. Mesmo após a retirada da carga de teste, os elos apresentarão tensões e deformações residuais.

Para o caso de estruturas hiperestáticas, há mais incógnitas do que equações de equilíbrio. O número de reações que não são necessárias para manter o equilíbrio é denominado grau de indeterminação. Esse conceito será aplicado na continuidade do presente trabalho, pois o grau de indeterminação determina o número de rótulas plásticas necessárias para ocasionar a falha da estrutura, como será visto oportunamente.

Existem vários métodos para obter-se as reações nos apoios em estruturas hiperestáticas elásticas, como o método da energia. Contudo, poucos são os métodos de resolução para o caso de estruturas hiperestáticas parcialmente plastificadas.

GORROCHATEGUI [5] apresentou desenvolvimento analítico e análise experimental para obter a análise limite, chegando à carga que causaria o colapso em

estruturas hiperestáticas sujeitas a trincas. Para o desenvolvimento analítico, utilizou Resistência dos Materiais para obter os esforços internos atuantes na estrutura como se não houvesse trinca.

Para tornar o modelo válido para estruturas com trinca, foram utilizados os conceitos de Mecânica da Fratura. Foi ensaiado um tubo vazado de grande comprimento, sendo preso nas extremidades na máquina de ensaio, para simular a situação de duto biengastado. Foi simulada a flexão de quatro pontos do duto através da aplicação de cargas concentradas, conforme pode ser observado na Fig. II-6, até o colapso da estrutura.

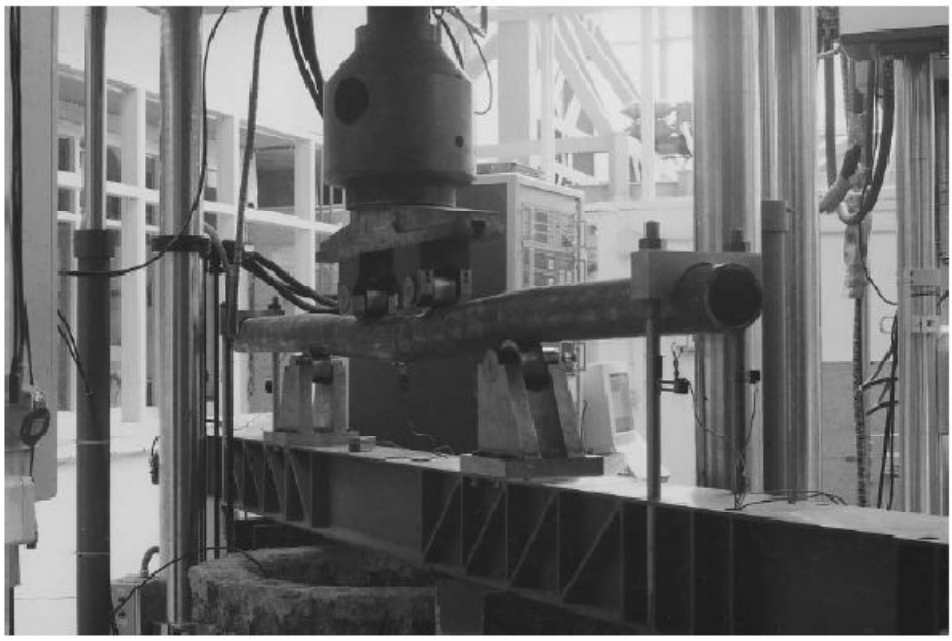


Figura II-6 – Ensaio para obtenção de tensões residuais em flexão[5]

CAPRANI [20] usou a análise incremental de plasticidade para obter a distribuição de momentos fletores para seções transversais de estruturas hiperestáticas. Por esse método, a estrutura segue sendo carregada com carga crescente até que a seção transversal que apresente o maior momento fletor atinja o momento fletor de plastificação e escoe por completo. A partir desse ponto, a estrutura perde a resistência ao momento fletor adicionais nessa seção e muda sua configuração para carregamentos adicionais, com um grau de hiperestaticidade menor.

BIN [21] buscou uma solução analítica exata para vigas delgadas em flexão pura em regimes elasto-plásticos para pequenas deformações. Ele estudou o caso de flexão com carga concentrada nas 2 extremidades e apoios distantes dessas extremidades, como pode ser observado na Fig.II-7:

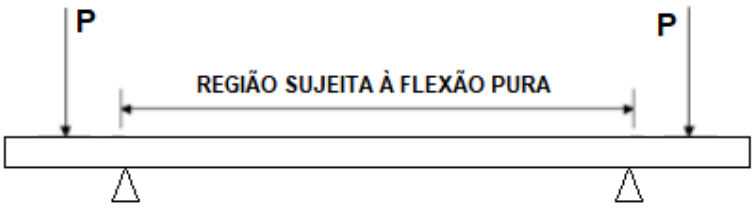


Figura II-7 – Modelo ensaiado por BIN [21]

Como resultado de uma análise inicial, BIN obteve a seguinte distribuição de região plástica, mostrada na Fig. II-8:

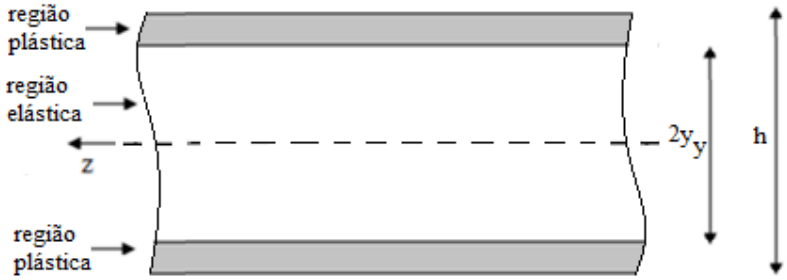


Figura II-8 – Regiões elástica e plásticas [21]

A área em cinza representa a região plástica, enquanto a região em branco permanece no regime elástico. O autor compara as soluções pelo método apresentado, com a teoria de clássica de plasticidade e o método de elementos finitos, conforme Fig. II-9, validando, assim, sua metodologia. A linha contínua apresenta a solução apresentada pelo autor, enquanto os pontos apresentam o valor contínuo obtido pela solução rígida-plástica e as cruzes apresentam a solução por elementos finitos.

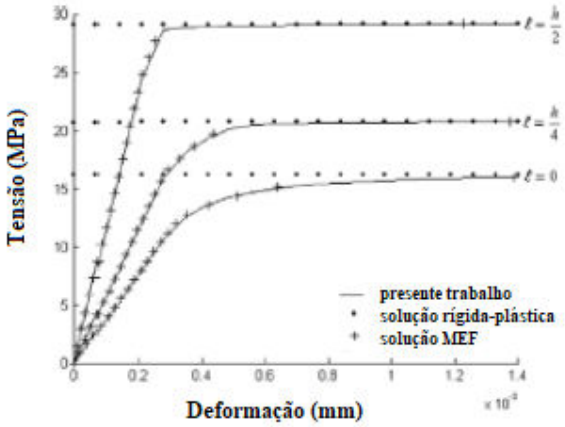
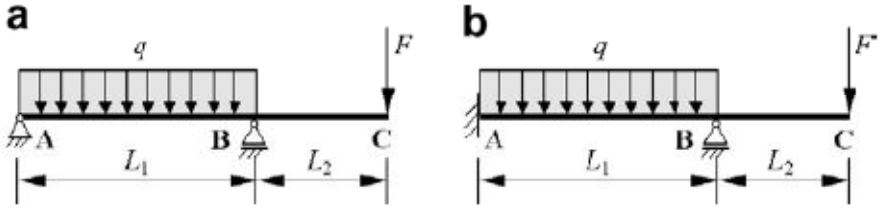


Figura II-9 – Comparação entre métodos [21]

Por fim, STOK [22] propôs uma modelagem analítica para vigas com seção transversal retangular. O autor utilizou a formulação baseada na lei de Hooke e na distribuição de tensões nos regimes elástico e plástico em estruturas estáticas e hiperestáticas. Na Fig.II-10.a tem-se a estrutura estática estudada, enquanto na Fig. II-10.b tem-se a estrutura hiperestática.



(a) (b)

Figura II-10 – Estruturas estudadas por STOK [22]

STOK [22] mostrou seções transversais que apresentam escoamento parcial, como apresentado na Fig. II-11, onde a área em cinza sofreu plastificação enquanto a branca permaneceu no regime elástico.

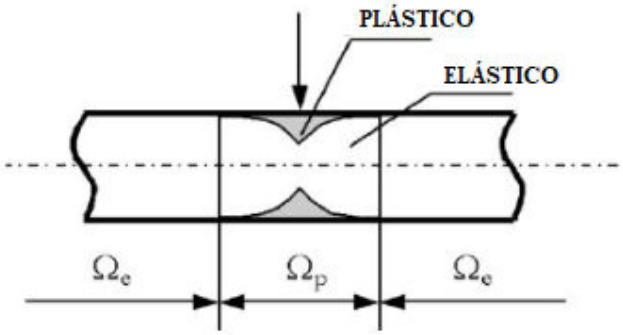


Figura II-11 – Escoamento parcial de seção transversal [22]

O autor faz uma análise completa da distribuição de tensões em uma seção transversal durante o carregamento. O artigo apresenta importantes conceitos que serão abordados em detalhe nos próximos itens do presente trabalho.

MC ROBIE [18] utilizou um método da análise gráfica para obter a distribuição de tensões em treliças estaticamente indeterminadas, dividindo a estrutura em uma família de diagramas de estruturas estaticamente determinadas, baseadas na composição hiperestática. Ainda na modelagem matemática, DASSIOS [19] propôs um modelo para estudar plasticidade e colapso de estruturas 3D compostas por material isotrópico, baseado na geração e propagação de microtrincas em metal deformado plasticamente.

Analisando toda a pesquisa bibliográfica, pode-se concluir que muitos estudos focaram na distribuição de tensões residuais, em especial em soldagem. Outros autores analisam estruturas hiperestáticas até a condição de colapso, aplicando a análise limite.

No próximo capítulo uma introdução aos conceitos básicos deste trabalho será feita.

Capítulo III – Conceitos Básicos

Este capítulo apresenta uma introdução a conceitos básicos, tais como: deformações elástica e plástica, tensões residuais, hiperestaticidade e outros conceitos importantes para o desenvolvimento do presente trabalho.

Deformações elástica e plástica

Pode-se definir deformação elástica como aquela deformação em que o corpo retorna ao seu estado inicial após cessar a solicitação nele imposta. Durante o carregamento, a maioria dos materiais elásticos apresenta um trecho proporcional inicial entre a tensão e a deformação, como pode ser observado na lei de Hooke unidimensional [1]:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{III.1}$$

Onde:

σ é *a tensão normal longitudinal*

ε é *a deformação longitudinal*

E é *o módulo de elasticidade do material*

A Fig. III-1 mostra um exemplo de diagrama de tensão *versus* deformação de engenharia. Pode-se observar que até o ponto *A*, a deformação é proporcional à tensão aplicada. A partir desse ponto, a curva perde a linearidade [1] com as tensões e as deformações crescendo ainda elásticas, mas não linearmente; e a partir do ponto B (escoamento) passando a ser plásticas.

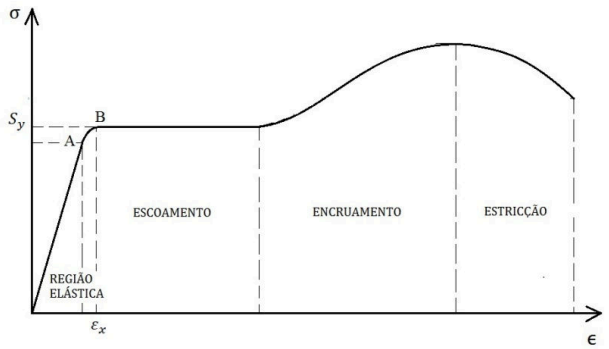


Figura III-1 – Gráfico tensão vs deformação de engenharia.[3] –ADAPTADO

Neste trabalho, utiliza-se o material elástico perfeitamente plástico, com a sua formulação constitutiva, válida apenas para carregamentos monótonos e não para descarregamentos, mostrada a seguir:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon_y < 0 \\ S_y, & \varepsilon_y \geq 0 \end{cases} \tag{III.2}$$

Onde, ε_y é $a\ deformação\ longitudinal\ de\ escoamento\ do\ material$

S_y é $a\ resistência\ ao\ escoamento\ do\ material$

Seu gráfico de tensão *versus* deformação é mostrado na Fig. III-2.

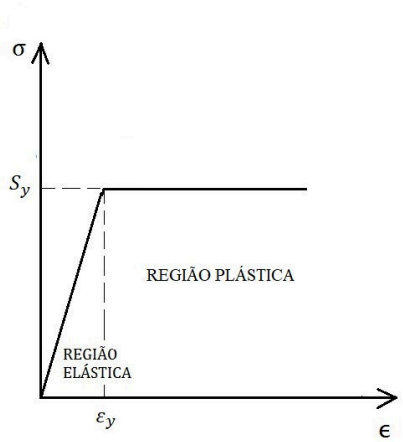


Figura III-2 – Diagrama tensão vs deformação de um material elástico perfeitamente plástico.[4] –ADAPTADO

Note que para o material elástico perfeitamente plástico, o material não apresenta encruamento na região plástica.

Momentos fletores elásticos, momentos fletores plásticos e rótulas plásticas

O momento fletor de início de escoamento M_y é definido como o momento fletor máximo que a seção transversal suporta sem alcançar a deformação plástica em nenhum ponto. No caso da seção retangular, o momento fletor de início de escoamento é obtido quando a tensão de escoamento S_y é alcançada em linhas nas extremidades superior e inferior da seção transversal paralelas a linha neutra [1].

O momento fletor plástico M_p é aquele que gera deformações plásticas em todos os pontos da seção transversal. A partir desse momento fletor, a seção totalmente plastificada da estrutura não suporta mais aumento de carga, tornando-se uma rótula plástica [23].

A Fig III-3 ilustra o efeito na distribuição de tensões normais longitudinais, em uma seção transversal retangular, em função do aumento do carregamento de momento fletor. Tem-se na primeira distribuição (da esquerda para a direita), o momento fletor menor que o momento fletor de início de escoamento. Na segunda, tem-se o momento fletor de início de escoamento, que é o valor limite para iniciar a plastificação parcial da estrutura M_y. Na terceira distribuição, tem-se a seção transversal parcialmente plastificada, apresentando a região mais próxima da linha neutra ainda em regime elástico (núcleo elástico). Por fim, tem-se o momento fletor plástico M_p aplicado, onde toda a seção transversal apresenta-se plastificada.

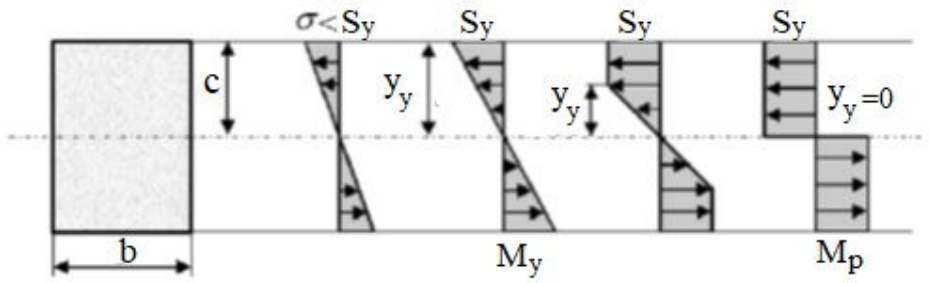


Figura III-3– Efeito na distribuição de tensões normais longitudinais, em uma seção transversal retangular, em função do aumento do carregamento de momento fletor [22]

Considerando um comportamento elástico-perfeitamente plástico do material, as tensões não aumentam após o escoamento e são lineares enquanto na fase elástica. Assim, têm-se as seguintes expressões:

$$\sigma_x = \frac{y}{y_y} S_y \quad para - y_y \leq y \leq y_y \tag{III.3}$$

$$\sigma_x = S_y \quad para - c \leq y \leq -y_y \; ou \; y_y \leq y \leq c \tag{III.4}$$

Onde:

y_y é $a\ semi - espessura\ do\ núcleo\ elástico$

y é $a\ distância\ do\ ponto\ considerado\ em\ relação$ à $linha\ neutra$

O núcleo elástico é definido como a porção do material que permanece no regime elástico [23]. A tensão na fronteira do núcleo elástico é igual à tensão de escoamento. A parte externa ao núcleo elástico é considerada plastificada.

A Fig.III-4 mostra as dimensões da seção transversal de uma viga de seção transversal retangular e a semi-espessura do núcleo elástico y_y.

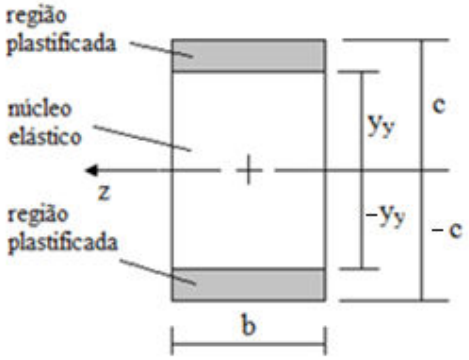


Figura III-4 – Dimensões de uma seção transversal retangular parcialmente plastificada

Onde, *b* é a largura e *c* é a semi- altura da seção transversal retangular. A região interna da seção está sujeita à tensões elásticas, enquanto a porção mais externa (cinza) está sujeita a tensões plásticas.

Para casos de estruturas que não estão sujeitas a cargas axiais externas, mas apenas a momentos fletores puros como mostrado na Fig.III.5, têm-se as seguintes equações de equilíbrio para forças (III.5) e momentos fletores (III.6):

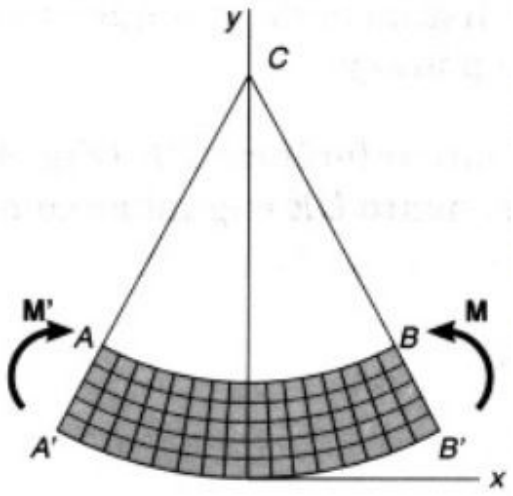


Figura III-5 – Viga submetida à flexão pura [1]

A Fig.III-6 mostra, para uma seção transversal retangular, as variáveis geométricas utilizadas na equação III.7.

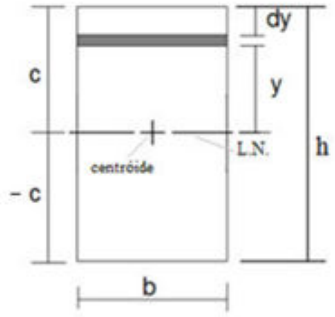


Figura III-6 – Seção transversal parcialmente plastificada

$$\int \sigma_x dA = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

Onde:

σ_x é *a tensão normal longitudinal*

dA é *o diferencial de área da seção transversal*

$$\int y\sigma_x dA = M \qquad \text{(III.6)}$$

Onde:

M é o momento fletor aplicado

Usando as equações (III.3) e (III-4), a equação de equilíbrio de momento fletor (III.6) e a Fig. III-6, pode-se obter o valor do momento fletor da seção transversal, dado pela seguinte equação:

$$M = 2\left[\int_0^{y_y} y\,\frac{y}{y_y}\,S_y\,b\,dy + \int_{y_y}^{c} y\,S_y b\,dy\right] = \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_y}{c}\right)^2\right) S_y\,b\,c^2 \qquad \text{(III.7)}$$

A partir da equação (III.7), pode-se determinar a semi-espessura do núcleo elástico y_y, já que todas as outras variáveis são dados do problema.

$$y_y = c\sqrt{3\left(1 - \frac{M}{S_y\,b\,c^2}\right)} \qquad \text{(III.8)}$$

A equação (III.7) ainda apresenta dois casos particulares, para seção transversal retangular, de grande relevância:

(I) Quando y_y for igual a c, tem-se o momento fletor de início de escoamento, M_y. A partir desse ponto, qualquer aumento de solicitação implicará no início da deformação plástica.

$$M_y = \frac{2}{3} S_y \, b \, c^2 \qquad \text{(III.9)}$$

(II) Quando y_y for igual a 0, tem-se que a seção transversal foi totalmente plastificada e o momento fletor atuante é denominado momento fletor plástico, M_p.

$$M_p = S_y \, b \, c^2 \qquad \text{(III.10)}$$

A espessura do núcleo elástico varia de seção para seção transversal da estrutura, em função da(s) carga(s) aplicada(s) e do(s) tipo(s) de apoio(s) presente(s) na estrutura.

Na Fig. III-7, mostra em um exemplo de uma carga concentrada de módulo P aplicada a meia distância em uma viga bi-apoiada, de valor tal que plastifica completamente a seção transversal abaixo desta.

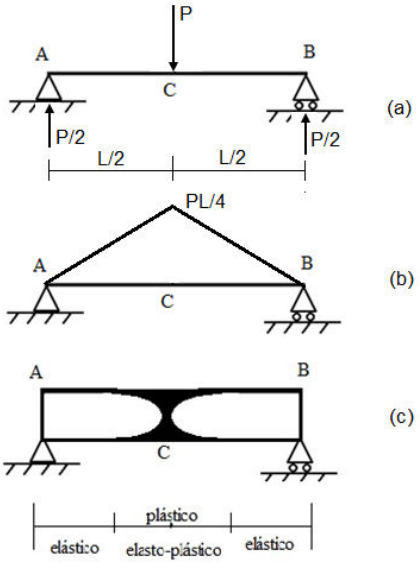


Figura III-7 – (a) Viga biapoiada com carga concentrada, (b) diagrama de momento fletor e (c) formação de rótula plástica em C [8] – ADAPTADO

Na Fig. III.7.c a região escura foi plastificada e a região clara permaneceu no regime elástico. Pode-se observar que toda a seção transversal *C* está escura, revelando a posição da 1ª rótula plástica. Pode-se notar, ainda, que a zona plastificada tem a forma de 2 parábolas. Tal formato pode ser explicado através da equação (III.8) e da distribuição de momentos fletores da Fig. III.7.b, pois embora o momento fletor M(x) varie linearmente em relação ao comprimento da viga, a semi espessura do núcleo elástico varia em função da raiz quadrada do momento fletor, gerando, assim, o formato parabólico.

Em estruturas estaticamente determinadas, como a mostrada na Fig. III.7.a, a geração de uma rótula plástica já é suficiente para o seu colapso. Em uma estrutura hiperestática, o colapso só ocorrerá quando ela for transformada em uma estrutura instável, após a formação de rótulas plásticas em suficientes seções transversais.

Com o aumento do carregamento, as seções que se comportam como rótulas plásticas passam a não resistir mais a momentos fletores adicionais [24], mudando as características da estrutura. Uma viga com *n* graus de hiperestaticidade entra em colapso quando, sob a ação das cargas, houver formação de n+1 rótulas plásticas [25].

Tensões Residuais

As tensões residuais surgem quando, por exemplo, cessa a carga atuante em um corpo que sofreu deformação plástica em certas regiões. A retirada dessa carga é equivalente à atuação de uma carga de mesmo módulo, mas em sentido contrário no corpo. Porém, esse descarregamento é elástico, desde que não exceda o dobro da resistência escoamento do material, para materiais com limites de escoamento iguais para tensão e compressão. Assim, para obter a distribuição de tensões residuais, soma-se a distribuição de tensões elasto-plásticas (gerada no carregamento) com a distribuição de tensões elásticas com sinais trocados (gerada no descarregamento ou *springback*).

As equações, a seguir, mostram para um carregamento que resulte em momento fletor positivo na seção analisada, como o da Fig. III-7 e onde o efeito das tensões cisalhantes foi desprezado, as tensões residuais resultantes:

$$\sigma_R(y) = S_y + M\frac{y}{I} \quad , \qquad para \; -c \leq y \leq -y_y \tag{III.11}$$

$$\sigma_R(y) = -\frac{y}{y_y} S_y + M\frac{y}{I} \; , \; para - y_y \leq y \leq y_y \tag{III.12}$$

$$\sigma_R(y) = -S_y + M\frac{y}{I} \quad , \qquad para \; y_y \leq y \leq c \tag{III.13}$$

Onde:

σ_R é *a tensão residual no ponto de distância vertical a partir da linha neutra* y

I é o momento de inércia de área

Assim, a distribuição de tensões residuais é formada pela sobreposição (soma) da distribuição de tensões durante a atuação da força concentrada e a distribuição de tensões do descarregamento elástico. Assim, para uma seção transversal retangular, a distribuição de tensões residuais pode ser modelada neste caso por:

$$\sigma_x(x,y) = S_y + \frac{3}{2}\frac{M_z(x)\cdot y}{b\cdot c^3}, \quad \text{para} \; -c \leq y \leq -y_y \tag{III.14}$$

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{y}{y_y}S_y + \frac{3}{2}\frac{M_z(x)\cdot y}{b\cdot c^3}, \quad \text{para} \; -y_y \leq y \leq y_y \tag{III.15}$$

$$\sigma_x(x,y) = -S_y + \frac{3}{2}\frac{M_z(x)\cdot y}{b\cdot c^3}, \quad \text{para} \; y_y \leq y \leq c \tag{III.16}$$

As equações (III.14 a III.16) são válidas para tensões de descarregamento com módulo até duas vezes a resistência ao escoamento do material, para materiais com limites de escoamento iguais para tensão e compressão.

O raio de curvatura da viga ρ relaciona-se com a deformação longitudinal ε e com a distância ao ponto considerado em relação a linha neutra *y* através da seguinte equação:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{III.17}$$

Utilizando-se a Lei de Hooke, da equação III.1, para a região não plastificada, na fronteira elasto-plástica do núcleo elástico, pode-se obter o raio de curvatura ρ de vigas com seções transversais parcialmente plastificadas:

$$\rho = -\frac{y_y . E}{S_y} \tag{III.18}$$

Distribuição de deformações em regime elasto-plástico sem encruamento

Em uma viga de seção transversal constante, a distribuição de deformações é linear mesmo em regime elasto-plástico de solicitação de momento fletor. A Fig. III-8 mostra as distribuições de tensões e deformações na metade superior de uma viga de material elástico- perfeitamente plástico submetida a momento fletor negativo [27].

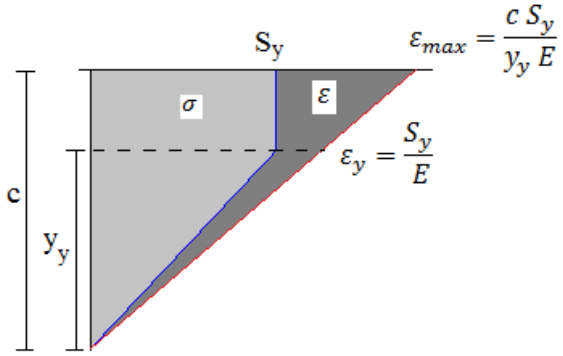


Figura III-8 – Distribuição das deformações e tensões em viga parcialmente plastificada carregada com momento fletor negativo [27]

Como mostrado anteriormente, em um material elástico-perfeitamente plástico, a tensão não aumenta após alcançar a resistência de escoamento, ficando constante para toda a região externa ao núcleo elástico da seção transversal. Por outro lado, a deformação permanece aumentando linearmente. A deformação na superfície da viga pode ser obtida utilizando as equações III.17 e III.18. Com isso, a deformação máxima, como pode ser vista na Fig. III.8, é dada por:

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{y_y} \cdot \frac{S_y}{E} = \frac{c}{y_y} \cdot \varepsilon_y \qquad \text{(III.19)}$$

Um exemplo de geração de tensão residual por escoamento parcial de viga submetida à flexão pura positiva pode ser observado na Fig. III-9, onde para a Fig. III-9.a, para $M_y<M<M_p$, existe um escoamento parcial da seção transversal, permanecendo o núcleo elástico. Na Fig. III-9.b, há a retirada do momento fletor M, resultando em um descarregamento elástico (*springback*). Por fim, na Fig. III-9.c tem-se a resultante da superposição das duas figuras anteriores, que é a distribuição das tensões residuais σ_R.

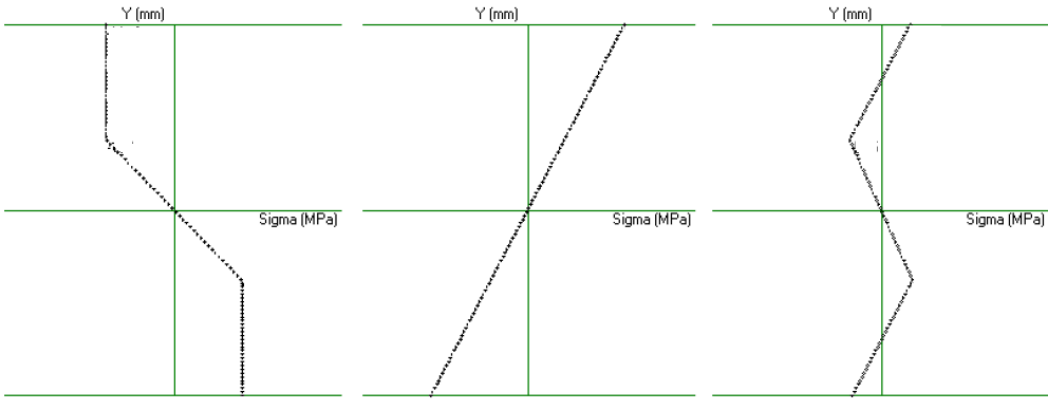


Figura III-9 – Distribuição de tensões em uma seção transversal submetida a momento positivo: (a) Carregamento, (b) descarregamento (*springback*) e (c) tensões residuais resultantes. [23]

É importante ressaltar que, nesse caso, os pontos de maior tensão residual podem encontrar-se no interior da seção reta e não nas extremidades superior e inferior da seção como ocorreria em um carregamento totalmente elástico. Essas tensões residuais podem afetar diretamente o desempenho à fadiga, à ruptura e à corrosão de uma estrutura [2].

A seguir faz-se uma introdução aos métodos analíticos de análise plástica.

Capítulo IV – Introdução aos métodos analíticos de análise plástica

Neste capítulo são apresentadas, de modo introdutório, algumas abordagens para descrição do desenvolvimento de tensões em estruturas parcialmente ou totalmente plastificadas.

Existem três métodos principais para realizar a análise plástica de estruturas: o Método Cinemático, o Método do Equilíbrio e o Método Incremental [20].

O Método Cinemático e o Método do Equilíbrio são métodos de análise limite, ou seja, permitem obter a carga crítica que seria suficiente para causar a falha da estrutura. Essa falha ocorrerá quando a estrutura tiver um número de seções transversais totalmente plastificadas equivalente ao seu grau de hiperestaticidade acrescido de uma unidade.Na análise limite, para identificar a carga crítica, devem ser analisados três critérios [20]:

- equilíbrio: os momentos fletores internos devem estar em equilíbrio com as cargas externas

- mecanismo (compatibilidade geométrica): no colapso, a estrutura ou parte dela deve comportar-se como um mecanismo.

- escoamento: em nenhum ponto da estrutura, pode-se ter um momento fletor maior do que o momento fletor plástico da seção transversal, ou seja, depois de totalmente plastificada, a seção transversal não suporta mais incrementos de momento fletor.

Baseado nesses critérios, pode-se enunciar dois teoremas que formam os fundamentos para a análise limite:

a) Teorema Estático:

Se existir uma distribuição de momentos fletores em uma estrutura linear que atenda simultaneamente as condições de equilíbrio e de escoamento (não necessariamente de compatibilidade geométrica) para um determinado conjunto de cargas λ, o valor de λ deve ser menor do que a carga de colapso [20]. Com isso, o Teorema Estático permite obter o limite inferior da carga crítica da estrutura.

b) Teorema Cinemático:

Se existir uma distribuição de momentos fletores em uma estrutura linear que atenda simultaneamente as condições de equilíbrio e de compatibilidade geométrica

(não necessariamente de escoamento) para um determinado conjunto de cargas λ, o valor de λ deve ser maior do que a carga de colapso [20]. Assim, o Teorema Cinemático permite obter o limite superior da mesma carga crítica.

Aplicando simultaneamente os citados teoremas, utilizam-se os três critérios (compatibilidade geométrica, escoamento e equilíbrio), pode-se concluir que a carga limite é única, conforme o Teorema da Unicidade. Um corolário importante desse teorema é que a carga de colapso é independente da ordem em que as rótulas plásticas são formadas. Isso permite que sejam usados métodos de plasticidade crítica, como o Método Cinemático (Princípio dos Trabalhos Virtuais), que são mais rápidos do que os métodos de análise elasto-plástica, mas fornecem menos informações sobre o comportamento da estrutura durante o carregamento.

Método Cinemático

Esse método é baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais, atendendo aos critérios de compatibilidade geométrica e das condições de equilíbrio.

Para um meio contínuo e em equilíbrio, o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores para um deslocamento virtual qualquer, compatível com as condições de contorno, é igual ao trabalho efetuado pelas forças internas em um mecanismo de deformações compatível com o deslocamento virtual [20].

Primeiramente é induzido o colapso da estrutura, através da atuação de um carregamento capaz de gerar um momento fletor plástico em tantas seções transversais quantas necessárias para o colapso da estrutura hiperestática.

Em uma segunda etapa do procedimento, os deslocamentos que essas forças causariam são estudados. Essas forças seriam capazes de gerar deslocamentos virtuais, que devem ser compatíveis geometricamente entre si. Dessas restrições, é possível obter as equações de trabalho para o estado de colapso.A partir dessas equações, é possível obter o momento fletor plástico e o carregamento máximo que a estrutura suportaria nessa situação limite [26].

Para exemplificar a aplicação do método cinemático, a Fig. IV-1 apresenta uma estrutura viga biengastada com carga concentrada na seção *C*, onde o método cinemático será aplicado para obter a carga *P* crítica.

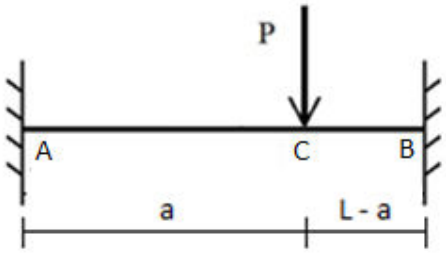


Figura IV-1 – Desenho Esquemático de uma viga biengastada com carga concentrada *P*

A estrutura apresenta dois graus de hiperestaticidade e, com isso, suporta três rótulas plásticas até a falha crítica. A distribuição de momentos fletores por seção transversal para a carga crítica pode ser observada na Fig. IV-2

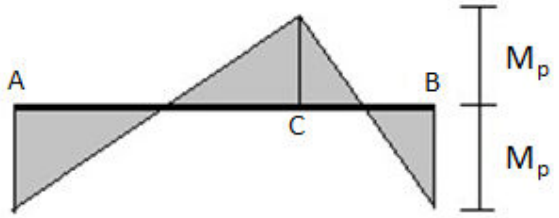


Figura IV-2 – Distribuição de momentos fletores na carga crítica

A escolha das seções *A*, *B* e *C* como rótulas plásticas se deve pelo fato de que essas seções são extremas da distribuição de momento fletor. CAPRANI [20] mostra porque não seria possível gerar rótulas em seções não extremas da distribuição. Supondo um pequeno deslocamento vertical de *C* para *C*', causado pela aplicação da força *P* crítica, tem-se a seguinte distribuição geométrica da Fig. IV-3

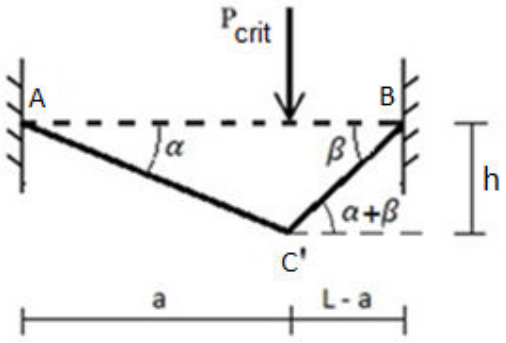


Figura IV-3 – Deslocamentos virtuais

O ângulo α é a rotação angular em A e o ângulo β é a rotação angular em B. Considerando pequenos deslocamentos, pode-se aproximar a altura h, que é o deslocamento vertical de *C* para *C*', através dos ângulos α e β:

$$h = a\alpha = (L - a)\beta \tag{IV.1}$$

Relacionando os ângulos:

$$\beta = \frac{a\,\alpha}{L - a} \tag{IV.2}$$

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), tem-se:

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{IV.3}$$

Onde:

δW_e é o trabalho das componentes externas (carga *P*)

δW_i é o trabalho das componentes internas (momentos fletores em *A*, *B* e *C*)

Assim, aplicando o PTV:

$$Ph = M_p\alpha + M_p(\alpha + \beta) + M_p\beta \tag{IV.4}$$

Substituindo os valores de α e β na eq. (IV.4), pode-se obter a carga crítica:

$$P_{crit} = \frac{2\,M_pL}{a(L - a)} \tag{IV.5}$$

Pode-se observar que esse método é bastante eficiente para análise limite, mas não fornece informações sobre os estados intermediários da estrutura.

Método Estático ou de Equilíbrio

Este método é baseado na distribuição de momentos fletores da estrutura, atendendo às condições de equilíbrio e de escoamento.

O Método de Equilíbrio para obter a análise limite é composto pelos seguintes passos [20]:

PASSO 1 - dividir a estrutura hiperestática em quantas estruturas estaticamente determinadas forem necessárias para descrever completamente a estrutura inicial.

PASSO 2 - desenhar o diagrama de momento fletor da estrutura inicial

PASSO 3 - desenhar o diagrama de momento fletor de cada um das estruturas estaticamente determinadas

PASSO 4 - construir a composição dos diagramas de momentos fletores combinado a estrutura inicial com as estruturas estáticas.

PASSO 5 - determinar as equações de equilíbrio para a citada composição de diagramas

PASSO 6 - escolher pontos nos quais há maior probabilidade de geração de rótulas plásticas e introduzir as equações de equilíbrio para esses pontos

PASSO 7 - calcular a carga de colapso

Como exemplo ilustrativo, tem-se uma viga engastada na seção *A* e apoiada na seção *B* com carga concentrada na seção *C*, conforme a Fig. IV-4

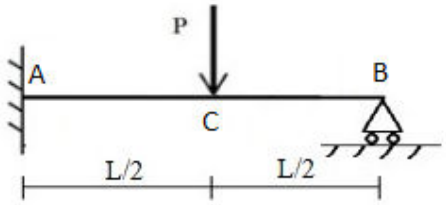


Figura IV-4 – Viga engastada-apoiada com carga centralizada

No primeiro passo a estrutura apresenta 1 grau de hiperestaticidade e, com isso, precisa de duas estruturas estaticamente determinadas para a descrever completamente, conforme pode ser observado na Fig. IV-5.

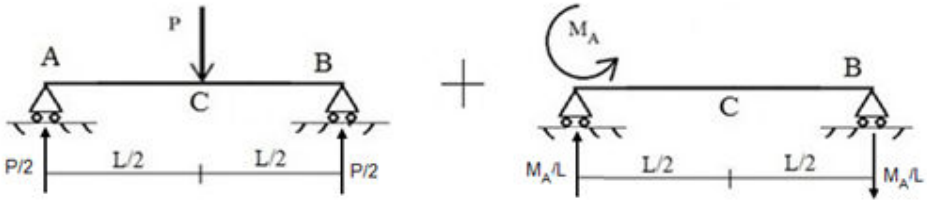


Figura IV-5 – Composição da viga em estruturas estáticas

No passo 2, tem-se a distribuição de momentos fletores da estrutura inicial. É importante ressaltar que, nesse ponto, a distribuição de momentos fletores é baseada apenas nos momentos fletores extremos M_A, M_B e M_C, que estão presentes respectivamente nas seções *A*, *B* e *C*, conforme Fig. IV-6. A distribuição busca analisar qual desses momentos fletores é maior.

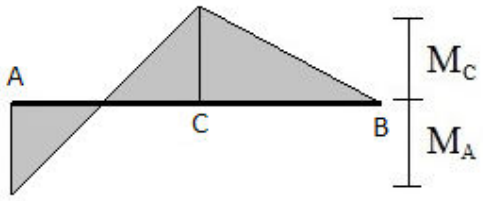


Figura IV-6–Distribuição esquemática de momentos fletores em viga engastada-apoiada

No passo 3, tem-se os diagramas das duas estruturas básicas que compõe a configuração inicial, conforme pode-se observar na Fig. IV-7:

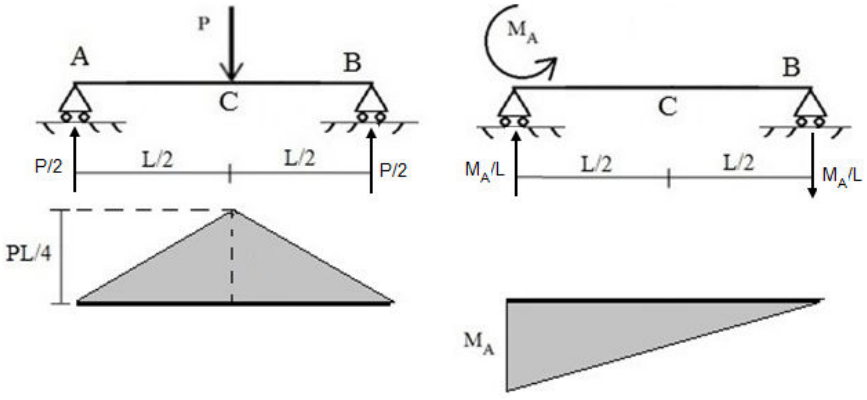


Figura IV-7 – Momentos fletores dos componentes da estrutura

No passo 4, são sobrepostos os diagramas. Primeiramente, os diagramas das estruturas básicas são sobrepostos e posteriormente somados, conforme Fig. IV-8, que deve resultar o diagrama de momentos fletores da estrutura engastada-apoiada original.

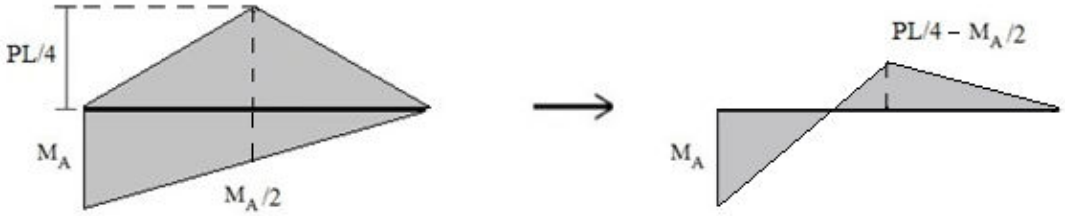


Figura IV-8 – Composição de momentos fletores das estruturas básicas gerando o momento fletor da estrutura original

No passo 5, pelo diagrama na Fig IV-8.b, a equação de equilíbrio no seção *C* deve ser:

$$M_C = \frac{PL}{4} - \frac{M_A}{2} \qquad \text{(IV. 6)}$$

Onde, *P* é a carga aplicada na seção *C*.

Sabe-se que são necessárias 2 rótulas nas seções *A* e *C*. Assim, para haver colapso da estrutura, as duas seções devem apresentar momento fletor plástico M_P. Assim:

$$M_P = \frac{PL}{4} - \frac{M_P}{2} \qquad \text{(IV. 7)}$$

A partir da equação (IV.7), pode-se obter o valor para a carga crítica em relação ao momento fletor plástico.

$$P_{crit} = \frac{6M_p}{L} \qquad \text{(IV. 8)}$$

Pode-se observar que esse método permite obter apenas a carga crítica.

Método Incremental de Análise Elasto-Plástica

Esse método é iterativo, partindo de um carregamento inicial que não causa deformação plástica, a carga é aumentada até que o momento fletor plástico seja atingido em uma determinada seção transversal. Essa seção perde a resistência a momento fletor adicionais e a estrutura passa a apresentar mais um grau de liberdade.

O processo de aumento gradativo do carregamento prossegue nessa nova estrutura até que o momento fletor de plastificação seja atingido em outra seção transversal. Novamente, a seção perde resistência a momentos fletores adicionais e a estrutura ganha mais um grau de liberdade.

Esse procedimento continua a ser realizado para valores crescentes de carregamento, até que seja atingido o número de rótulas plásticas necessárias para o colapso da estrutura. É um método mais trabalhoso, mas se adéqua bem aos recursos computacionais [20].

No capítulo V será apresentado um exemplo detalhado de aplicação do Método Incremental em uma viga biengastada com aplicação de carga concentrada, através do Método Incremental, que permite acompanhar várias variáveis, como distribuição de momentos, durante etapas intermediárias de carregamento.

No próximo capítulo uma aplicação do método incremental será feita.

Capítulo V – Aplicação do método incremental ao problema de uma viga biengastada

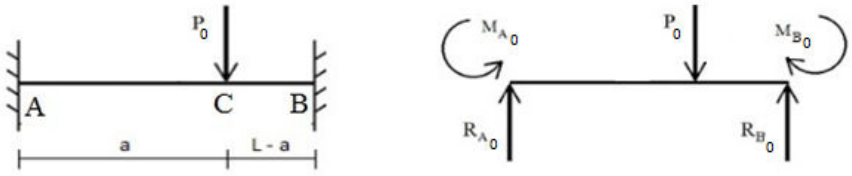
Nesse capítulo, aborda-se a solução analítica, utilizando o método incremental, para obter as tensões residuais em uma viga biengastada, de seção transversal retangular constante, sujeita a uma força concentrada *P*, aplicada na seção transversal *C*, promovendo o carregamento da estrutura por flexão conforme a Fig. V-1.a.

Para a presente análise, será considerada uma viga longa, desprezando os efeitos do cortante, além disso, as deformações e os deslocamentos serão considerados pequenos. Será considerado um carregamento monótono, apresentando apenas um carregamento, seguido de descarregamento.

A carga *P* será variada entre uma ampla gama de valores, seguida de seu respectivo descarregamento elástico, para estudar o comportamento da estrutura nas diversas fases de plastificação de suas seções transversais.

V.1 Momentos fletores antes da 1ª rótula plástica

O Diagrama de Corpo Livre (DCL) dessa estrutura é apresentado na Fig. V-1.b, onde a carga P_0 tem a seguinte faixa de variação: $0 \leq P_0 < P_1$.



(a) (b)

Figura V-1 – Viga biengastada e DCL da viga [20]

Na Fig.V-1.b, pode-se observar que estão atuando 4 componentes de reação no sistema, sendo 2 forças e 2 momentos fletores. Para definir completamente o sistema, há necessidade de quantificar essas 4 incógnitas.

Pelas equações de equilíbrio, tem-se:

$$R_{A_0} + R_{B_0} = P_0 \quad (V.1)$$

$$M_{A_0} + R_{B_0}.L - P_0.a - M_{B_0} = 0 \quad (V.2)$$

Onde:

R_{A_0} *e* R_{B_0} são as forças de reação nos engastes *A* e *B* respectivamente;

M_{A_0} *e* M_{B_0} são os momentos fletores de reação nos engastes *A* e *B* respectivamente;

P_0 é a força concentrada aplicada na seção *C*;

L é o comprimento total da viga;

a é a distância entre as seções transversais *A* e *C*.

Pode-se observar que são 4 incógnitas para 2 equações de equilíbrio. Assim, há redundância de apoios na estrutura igual a essa diferença, ou seja, há duas redundâncias de apoio ou graus de hiperestaticidade. Como visto no capítulo anterior, se a estrutura possui 2 graus de hiperestaticidade, ela suporta até 3 rótulas plásticas (na terceira ocorrerá o colapso da estrutura). Para obter as outras duas equações necessárias para descrever completamente o sistema, pode-se usar, por exemplo, o método da superposição. A estrutura da Fig. V-1.a pode ser decomposta em três estruturas distintas, conforme a Fig. V-2.

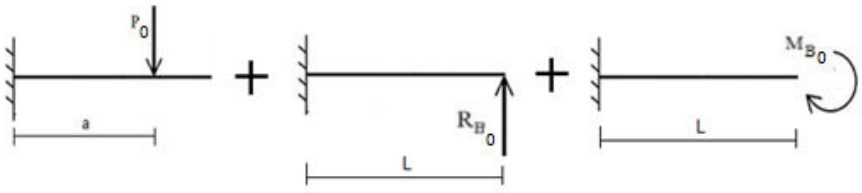


Figura V-2 – Decomposição da viga biengastada [1]

Assim, utilizando as condições de contorno do engaste na seção *B*, tem-se que não há rotação nessa seção transversal, conforme equação (V.3), e também não há deslocamento vertical da mesma, conforme equação (V.4) [1].

$$\theta_{B_0} = -\frac{P_0\, a^2}{2EI} + \frac{R_{B_0} L^2}{2EI} - \frac{M_{B_0} L}{EI} = 0 \qquad \text{(V.3)}$$

$$\delta_{B_0} = -\frac{P_0\, a^2 (3L-a)}{6EI} + \frac{R_{B_0} L^3}{3EI} - \frac{M_{B_0} L^2}{2EI} = 0 \qquad \text{(V.4)}$$

Onde:

θ_{B_0} é a rotação na seção *B* e δ_{B_0} é o deslocamento vertical na seção *B*.

Resolvendo o sistema de quatro equações e quatro incógnitas formado pelas equações de (V.1) a (V.4), tem-se:

$$M_{B0} = \frac{P_0 a^2 (L - a)}{L^2} \quad (V.5)$$

$$R_{B0} = \frac{P_0 a^2 (3L - 2a)}{L^3} \quad (V.6)$$

$$M_{A0} = \frac{P_0 a (L - a)^2}{L^2} \quad (V.7)$$

$$R_{A0} = P_0 \frac{(L - a)^2 (L + 2a)}{L^3} \quad (V.8)$$

A distribuição de momentos fletores nas seções transversais da viga é fundamental para definir as seções críticas com maior possibilidade de se tornarem rótulas plásticas. A Fig. V-3 apresenta o primeiro corte imaginário para obtenção desses momentos fletores, para $0 \leq x \leq a$ e a Fig. V-4 apresenta o segundo corte, para $a < x \leq L$.

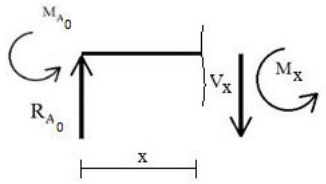


Figura V-3 – corte da seção para $0 \leq x \leq a$ [1]

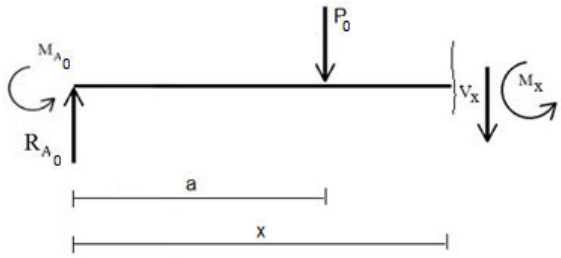


Figura V-4 – corte da seção para $a < x \leq L$ [1]

Assim, as equações de distribuição de momento fletor no eixo x são:

$$M(x) = -M_{A0} + R_{A0}\, x \qquad \text{onde: } 0 \leq x \leq a \quad (V.9)$$

$$M(x) = -M_{A0} + R_{A0}\, x - (x - a)P_0 \qquad \text{onde: } a < x \leq L \quad (V.10)$$

Onde:

x é a distância horizontal entre uma seção transversal e a seção transversal *A*.

A Fig. V-5 apresenta um caso específico da distribuição de momentos fletores em viga biengastada, utilizando as equações (V.9) e (V.10). Nesse caso, a força P_0, menor que a força necessária para geração da 1ª rótula, é aplicada na seção *C* distante 2/3 L da seção *A*.

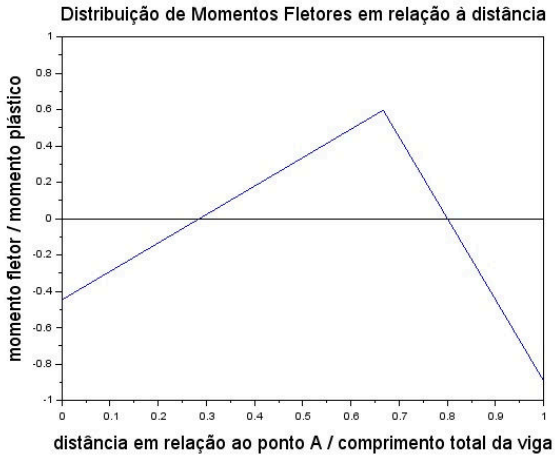


Figura V-5 – Exemplo de diagrama de momento fletor da viga biengastada

V.2 Geração da 1ª rótula plástica

Do gráfico da Fig. V-5, nota-se que existem três seções de extremos de momento fletor (em módulo) *A*, *B* e *C*. Esses são as seções com maior probabilidade de gerar rótulas plásticas. Assim, a primeira seção transversal a plastificar completamente é a que apresenta maior módulo de momento fletor no gráfico, que é a extremidade engastada *B* da viga.

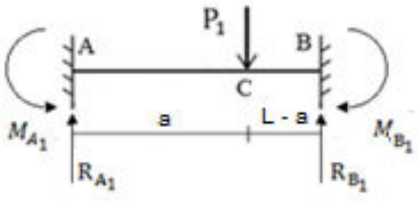


Figura V-6 – D.C.L. até a 1ª rótula plástica da viga biengastada [1]

Portanto, na seção transversal *B*, iguala-se a equação (V.5) adaptada (usando P_1 no lugar de P_0) ao momento fletor plástico:

$$M_{B1} = M_P = \frac{P_1\, a^2(L-a)}{L^2} \qquad (V.11)$$

Assim, pode-se obter a carga geradora da primeira rótula P_1:

$$P_1 = \frac{M_p L^2}{a^2(L-a)} \qquad (V.12)$$

Onde, P_1 é a carga crítica capaz de gerar a 1ª rótula em *B*

Assim, se a força concentrada *P* aplicada na seção transversal *C* for maior que P_1, a seção transversal *B* passará a não resistir a momentos fletores adicionais e, para o incremento de carga em relação a P_1, a estrutura se comportará como um apoio simples. Deve-se destacar, contudo, que apenas o incremento de momento fletor na seção *B* será nulo.

Assim, as seções transversais *A*, *B* e *C* apresentam os seguintes momentos fletores para $P = P_1$:

$$M_{A1} = M_P \frac{L-a}{a} \qquad (V.13)$$

$$M_{B1} = M_P \qquad (V.14)$$

$$M_{C1} = \frac{2M_P(L-a)}{L} \qquad (V.15)$$

V.3 Distribuição de momentos fletores da estrutura entre a 1ª e a 2ª rótulas

Para cargas superiores a P_1, dado pela equação (V.12), há plastificação total da seção transversal *B* e a mesma passa a não resistir a qualquer variação adicional de momento fletor.

A estrutura, então, passa a se comportar como uma viga engastada na extremidade *A* e apoiada na extremidade *B*, apenas para o incremento de carga em relação a P_1, ΔP_{12}, como pode ser observado na Fig. V-7:

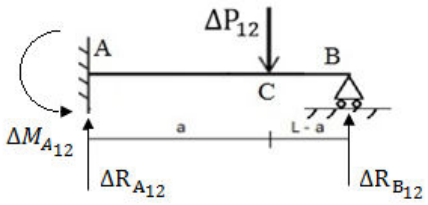


Figura V-7 – D.C.L. entre a 1ª e a 2ª rótulas plásticas da viga engastada – apoiada [1]

Assim, não haverá aumento de momento fletor na seção transversal *B* mesmo com o aumento da solicitação, o momento fletor permanecerá igual a M_p.

Utilizando o método de análise elasto-plástica incremental, os momentos fletores, em cada seção transversal, passam a ser a soma do momento fletor causado pela carga P_1 na estrutura biengastada com o momento fletor para a carga incremental, utilizando a estrutura engastada-apoiada.

O anexo A apresenta uma tabela com as cargas críticas, as reações da estrutura, a distribuição de momentos fletores para todas as cargas $0 \leq P \leq P_3$.

O incremento ΔP_{12} será utilizado para cargas até a carga limite geradora da 2ª rótula P_2 (exclusive).

Considerando a força incremental aplicada ΔP_{12}, tem-se:

$$\Delta P_{12} = P_{12} - P_1 \tag{V.16}$$

Para obter as novas forças de apoio, foram usadas as equações de equilíbrio (V.17 e V.18) e o método da superposição considerando que não há deslocamento vertical na seção transversal *B*, $\delta_{B12} = 0$, equação (V.19):

$$\Delta R_{A_{12}} + \Delta R_{B_{12}} = \Delta P_{12} \tag{V.17}$$

$$\Delta M_{A_{12}} + \Delta R_{B_{12}} L = a \Delta P_{12} \tag{V.18}$$

$$0 = \frac{\Delta R_{B_{12}} L^3}{3EI} - \frac{\Delta P_{12} a^2 (3L - a)}{6EI} \tag{V.19}$$

Onde:

$\Delta R_{A_{12}}$ é a reação na seção *A* para a aplicação da carga incremental ΔP_{12};

$\Delta R_{B_{12}}$ é a reação na seção *B* para a aplicação da carga incremental ΔP_{12};

$\Delta M_{A_{12}}$ é o momento fletor na seção *A* para a aplicação da carga incremental ΔP_{12};

ΔP_{12} é a carga incremental aplicada.

Assim, resolvendo o sistema composto por (V.17 a V.19), as novas forças de apoio são:

$$\Delta R_{A_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^3}(2L^3 - 3a^2L + a^3) = \frac{\Delta P_{12}}{L^3}(L - a)\left(L + a\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(L + a\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad \text{(V.20)}$$

$$\Delta M_{A_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^2}a(2L^2 - 3aL + a^2) = \frac{\Delta P_{12}}{2L^2}a\,(2L - a)(L - a) \quad \text{(V.21)}$$

$$\Delta R_{B_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^3}a^2(3L - a) \quad \text{(V.22)}$$

Com isso, a distribuição de momento fletor incremental é dada por:

$$\Delta M_{12}(x) = -\Delta M_{A_{12}} + \Delta R_{A_{12}}\,x, \qquad \text{para } 0 \le x \le a \quad \text{(V.23)}$$

$$\Delta M_{12}(x) = -\Delta M_{A_{12}} + \Delta R_{A_{12}}\,x - \Delta P_{12}(x - a), \qquad \text{para } a < x \le L \quad \text{(V.24)}$$

Obtidos os valores de momento fletor incremental em cada seção transversal, é possível calcular o momento fletor em cada uma das seções. Para isso, basta somar o momento fletor da seção transversal com a carga geradora da 1ª rótula com o momento fletor incremental. Assim, o momento total após a primeira plastificação é:

$$M_{12}(x) = M_1(x) + \Delta M_{12}(x) \quad \text{(V.25)}$$

A equação (V.25) é válida para valores de carga entre a 1ª e a 2ª rótula. A partir da qual, há uma nova mudança de composição da estrutura.

V.4 Geração da 2ª rótula plástica

Pela seção transversal *C* apresentar maior momento fletor do que a seção transversal *A*, a seção transversal *C* formará a 2ª rótula plástica.

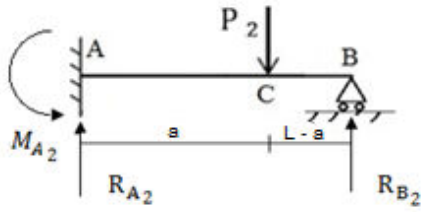


Figura V-8 - D.C.L. da 2ª rótula plástica da viga engastada – apoiada [1]

Para obter o módulo da força P que causa a plastificação total em *C*, deve-se igualar o momento fletor em *C* ao momento fletor plástico. O momento fletor em *C*, por sua vez, é a composição entre o momento fletor durante a 1ª rótula e o momento fletor da carga incremental, conforme analisado no item anterior. As equações para incrementos de momento fletor e reações do item anterior são válidas no presente item, alterando-se apenas o sub-índice 12 para 2, que representa o incremento na 2ª rótula. Assim, para a carga P_2, tem-se:

$$\mathrm{M_{C2}} = \mathrm{M_P} = \mathrm{S_y bc^2} \tag{V.26}$$

$$\mathrm{M_{C2}} = \mathrm{M_{C1}} + \Delta\mathrm{M_{C2}} \tag{V.27}$$

Substituindo as equações (V.20), (V.21) em (V.23) para a seção *C*, tem-se:

$$\Delta\mathrm{M_{C2}} = \frac{\Delta\mathrm{P_2 a^2}}{2\mathrm{L^3}}\,(3\mathrm{L^2} - 4\mathrm{aL} + \mathrm{a^2}) = \frac{\Delta\mathrm{P_2 a^2}}{2\mathrm{L^3}}\,(\mathrm{L} - \mathrm{a})(3\mathrm{L} - \mathrm{a}) \tag{V.28}$$

Assim, substituindo (V.15) e (V.28) em (V.27), e isolando $\Delta\mathrm{P_2}$, tem-se:

$$\Delta\mathrm{P_2} = \frac{\mathrm{M_p}(2\mathrm{a} - \mathrm{L})2\mathrm{L^2}}{\mathrm{a^2}(3\mathrm{L^2} - 4\mathrm{aL} + \mathrm{a^2})} = \mathrm{M_p}\,\frac{2\mathrm{L^2}(2\mathrm{a} - \mathrm{L})}{\mathrm{a^2}(\mathrm{L} - \mathrm{a})(3\mathrm{L} - \mathrm{a})} \tag{V.29}$$

Assim, para obter a carga geradora da 2ª rótula, foi realizado procedimento análogo ao procedimento dos momentos fletores, mostrado na equação (V.27). Na configuração da 2ª rótula, tem-se:

$$P_2 = P_1 + \Delta P_2 = \frac{M_p L^2}{a^2(L-a)} + \frac{M_p(2a-L)2L^2}{a^2(3L^2-4aL+a^2)} = \frac{M_p L^2(L+3a)}{a^2(3L-a)(L-a)} \qquad (V.30)$$

O anexo A apresenta uma tabela com as cargas críticas, as reações da estrutura, a distribuição de momentos fletores para todas as cargas $0 \leq P \leq P_3$. Como visto anteriormente, o momento fletor nas seções *B* e *C* são iguais a M_P. O momento fletor na seção *A*, para $P = P_2$, é dado por:

$$M_{A2} = M_{A1} + \Delta M_{A2} \qquad (V.31)$$

$$M_{A2} = M_P \frac{L^2 + aL - a^2}{a(3L-a)} \qquad (V.32)$$

V.5 Distribuição de momentos fletores da estrutura entre a 2ª e a 3ª rótulas

Após a 2ª rótula, a seção transversal *C* passa a não suportar mais momentos fletores adicionais. Assim, a viga vai se comportar como uma estrutura mostrada na Fig. V-9.

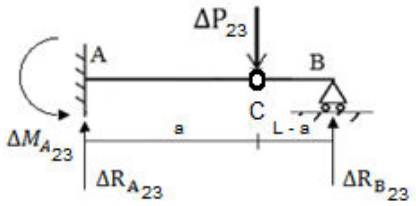


Figura V-9 – Viga engastada, apoiada com rótula em *C*

A carga incremental após a segunda rótula é dada por:

$$\Delta P_{23} = P_{23} - P_2 \qquad (V.33)$$

Nota-se que a estrutura da Fig. V-9 com a rótula plástica em *C*, para cargas adicionais, transforma-se em uma viga mono-engastada *AC*. É possível calcular as reações de força e momento fletor na seção *A*. Assim:

$$\Delta R_{A23} = \Delta P_{23} \tag{V.34}$$

$$\Delta R_{B23} = 0 \tag{V.35}$$

$$\Delta M_{A23} = a\Delta P_{23} \tag{V.36}$$

A distribuição do momento fletor incremental na estrutura é dado por:

$$\Delta M_{23}(x) = -\Delta M_{A23} + \Delta R_{A23}\, x\ , \qquad \text{para } 0 \leq x \leq a \tag{V.37}$$

Os momentos fletores são calculados como uma superposição dos momentos fletores das 3 estruturas de forma incremental. O momento fletor total em cada seção da estrutura para uma carga entre a 2ª rótula e a 3ª rótula (exclusive) é dado por:

$$M_{23}(x) = M_1 + \Delta M_2(x) + \Delta M_{23}(x) \tag{V.38}$$

Da equação (V.38), pode-se concluir que a seção transversal *A* será a próxima a ser totalmente plastificada. A estrutura inicial tinha 2 graus de hiperestacidade, assim, resistiria à plastificação total de 2 de suas seções transversais sem entrar em colapso. A terceira rótula plástica, contudo, leva a estrutura ao colapso.

V.6) Geração da 3ª rótula e o colapso da estrutura

Para representar a carga necessária para geração da 3ª rótula, será utilizado o sub-índice 3 em substituição ao sub-índice 23 nas equações (V.33-38). Assim, calculando a carga crítica P_3 para o colapso da estrutura, tem-se:

$$M_{A3} = M_{A1} + \Delta M_{A2} + \Delta M_{A3} = M_P \tag{V.39}$$

Assim:

$$\Delta P_3 = M_P \frac{-L(L-2a)}{a^2(3L-a)} \qquad (V.40)$$

E, por fim, substituindo-se as equações (V.30) e (V.40) na equação (V.41) tem-se:

$$P_3 = P_2 + \Delta P_3 = M_p \frac{2L}{a(L-a)} \qquad (V.41)$$

A equação (V.41) apresenta a carga limite da estrutura, utilizando o método incremental de análise elasto-plástica. Esse valor é igual ao obtido no capítulo IV, equação (IV.5), através do método cinemático, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Assim, pode-se observar que embora o método cinemático seja mais direto quando o objetivo é obter a carga crítica da estrutura, e o método incremental seja mais trabalhoso, este último descreve completamente as etapas intermediárias até atingir a carga crítica da estrutura.

V.7 Análise de um exemplo de viga biengastada

Nos itens anteriores, foram analisadas as distribuições de momentos fletores de uma viga biengastada. A seguir é feito a aplicação dos resultados obtidos para um viga biengastada de comprimento unitário, com a carga transversal P (variando de 0 até a carga de colapso da estrutura) aplicada em a = 2/3 do engaste mais à esquerda.

Carga crítica para geração da 1ª rótula (P_1), distribuição de momentos fletores e plastificação das seções transversais

Conforme visto anteriormente, a primeira seção transversal a ser totalmente plastificada é a *B*. Substituindo os valores dos parâmetros definidos na equação (V.12), a carga para a geração da 1ª rótula é:

$$P_1 = \frac{27}{4}\frac{M_p}{L} \qquad (V.42)$$

Nessa situação, tem-se a seguinte distribuição de momentos fletores (normalizados em relação ao momento fletor plástico) pela distância das seções transversais normalizadas pelo comprimento unitário da viga (as linhas horizontais são - M_y/M_P, 0 e + M_y/M_P):

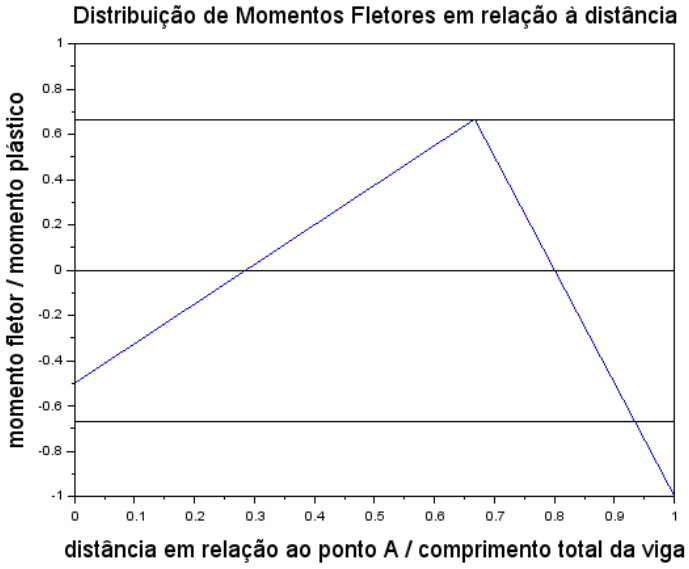


Figura V-10 – Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_1(linha azul)

A Fig. V-11 apresenta em azul na vista lateral da viga em que houve plastificação. No eixo y, tem-se a distância normalizada do ponto em relação à linha neutra da seção transversal, enquanto no eixo x, tem-se a distância normalizada da seção transversal em relação à seção *A*.

Assim, pode-se observar que não houve plastificação em grande parte das seções transversais. Apenas nas seções mais próximas de *B* houve plastificação parcial e somente em *B* houve plastificação total da seção transversal.

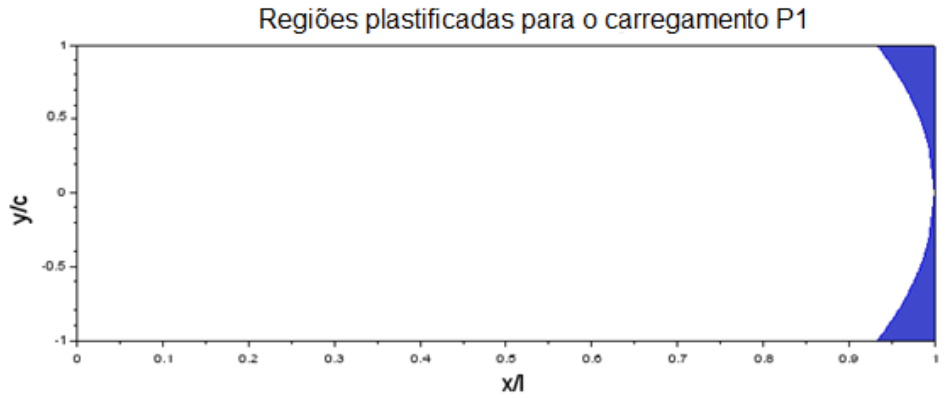


Figura V-11 – Distribuição de regiões plastificadas na viga para P_1 (vista lateral)

Carga crítica para geração da 2ª rótula (P_2), distribuição de momentos fletores e plastificação das seções transversais

Depois de alcançar P_1, a estrutura muda de configuração, conforme Fig. V-7. Essa nova configuração permanece até que a carga crítica de geração da 2ª rótula seja alcançada na seção *C*. Utilizando a equação (V.29) é possível obter a carga incremental crítica e, a partir da equação (V.30), a carga crítica para a geração da rótula em *C*.

$$\Delta P_2 = \frac{27}{14}\frac{M_P}{L} \qquad (V.43)$$

$$P_2 = \frac{243}{28}\frac{M_p}{L} \qquad (V.44)$$

O novo diagrama de momentos fletores pode ser comparado com o diagrama de momentos fletores para a carga de geração da 1ª rótula, conforme Fig. V-12. Nessa situação, pode-se perceber aumento em módulo dos momentos fletores nas seções extremas *A* e *C*, enquanto a seção *B* mantém o momento fletor plástico.

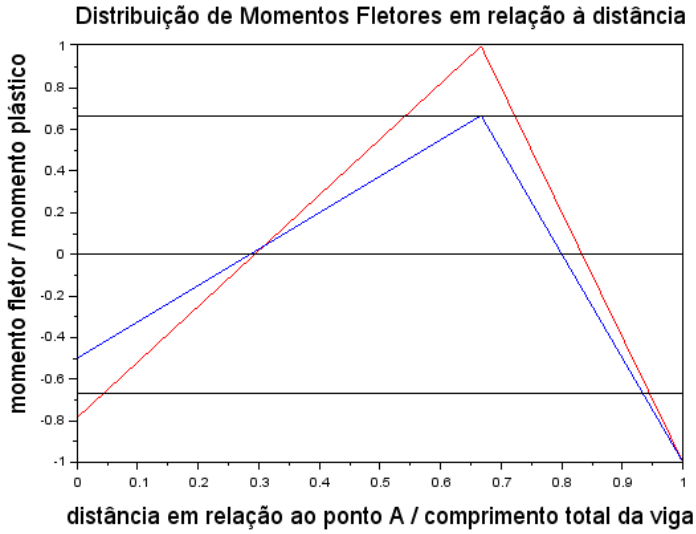


Figura V-12 - Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_2 (linha vermelha)

A Fig. V-13 apresenta um gráfico análogo ao apresentado na Fig. V-11. Nela, pode-se perceber o surgimento de plastificação nas seções transversais próximas as seções *A* e *C* e a plastificação completa da seção transversal *C*.

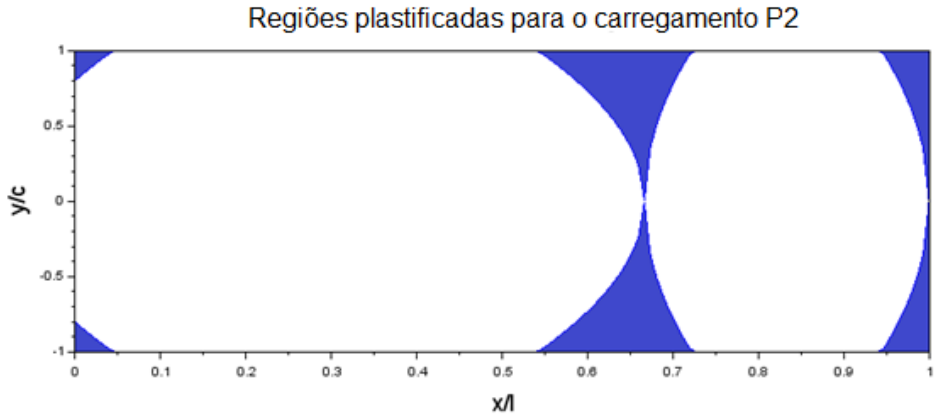


Figura V-13 – Distribuição de regiões plastificadas na viga para P_2 (vista lateral)

Carga crítica para a estrutura (P_3), distribuição de momentos fletores e plastificação das seções transversais

A seção *A* é a terceira a alcançar o momento fletor plástico e, com isso, a estrutura entra em colapso. Utilizando a equação (V.40) é possível obter a carga incremental crítica e, a partir da equação (V.41), a carga crítica para a geração da rótula em *A*:

$$\Delta P_3 = \frac{9}{28}\frac{M_p}{L} \qquad (V.45)$$

$$P_3 = 9\frac{M_p}{L} \qquad (V.46)$$

A distribuição de momentos fletores em cada seção transversal é apresentada na Fig. V-14. Nela, tem-se sobrepostos os momentos fletores durante a 1ª rótula (azul), durante a 2ª rótula (vermelho) e de 3ª rótula (verde).

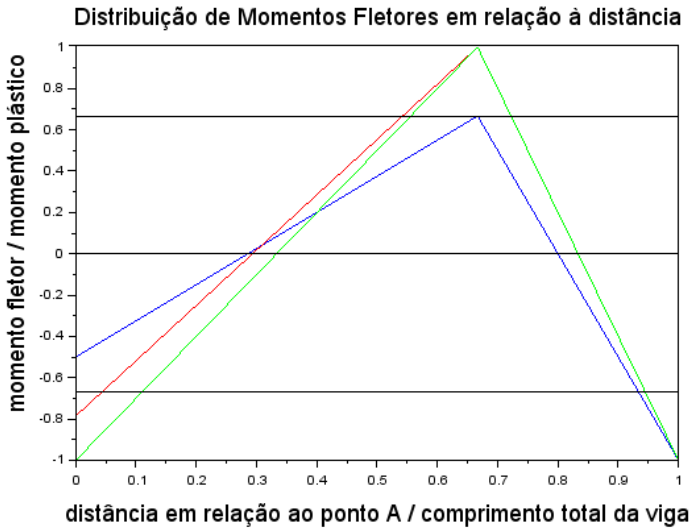


Figura V-14 - Distribuição de momentos fletores para carga igual a P_3 (linha verde)

Por fim, a Fig. V-15 em azul região lateral da viga em que houve plastificação da viga no colapso. Notam-se várias seções transversais com plastificação parcial e as seções *A*, *B* e *C* com rótulas plásticas desenvolvidas.

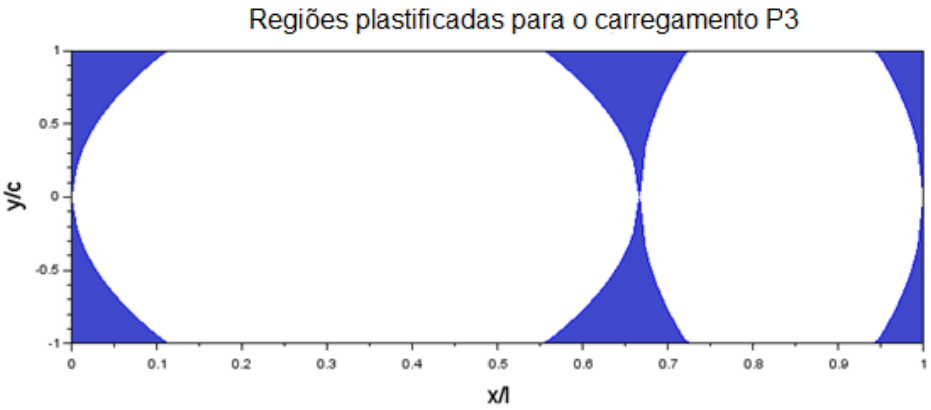


Figura V-15 – Distribuição de regiões plastificadas na viga para P_3 (vista lateral)

No próximo capítulo a distribuição das tensões residuais em seções transversais com rótulas plásticas desenvolvidas será apresentada.

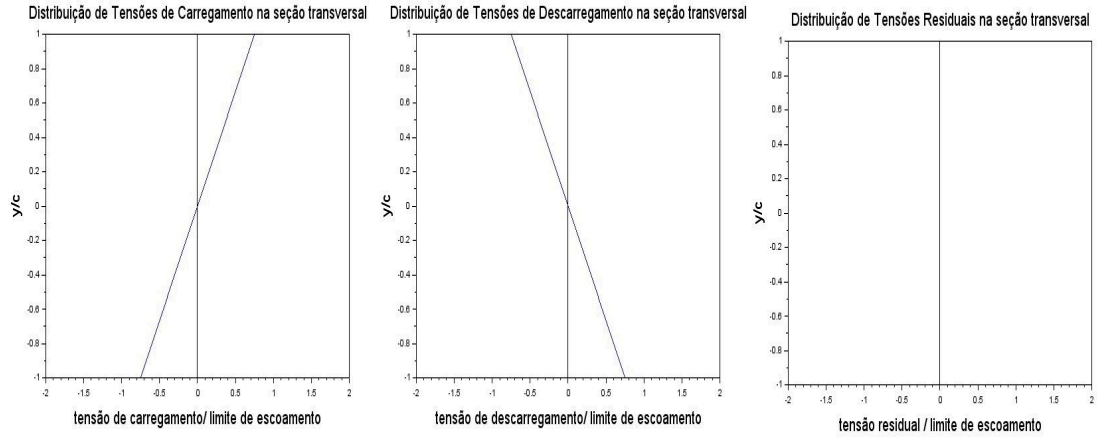
Capítulo VI – Distribuição das tensões residuais nas seções transversais com rótulas plásticas

VI.1 Análise de Tensões Residuais para o primeiro carregamento crítico (P_1) seguido de descarregamento elástico

Para o carregamento da força P_1, seguido de descarregamento elástico, apresenta-se a distribuição das tensões residuais em três seções transversais (nas seções das extremidades *A* e *B*, e na seção de aplicação da força *C*).

A Fig. VI-1.a apresenta as tensões de carregamento na seção transversal *A*. Nela, pode-se observar que não houve plastificação de nenhuma parte da seção transversal. Esse fato também foi observado na Fig. V-11, que mostra que a seção *A* apresentava núcleo elástico em toda a altura de sua seção transversal.

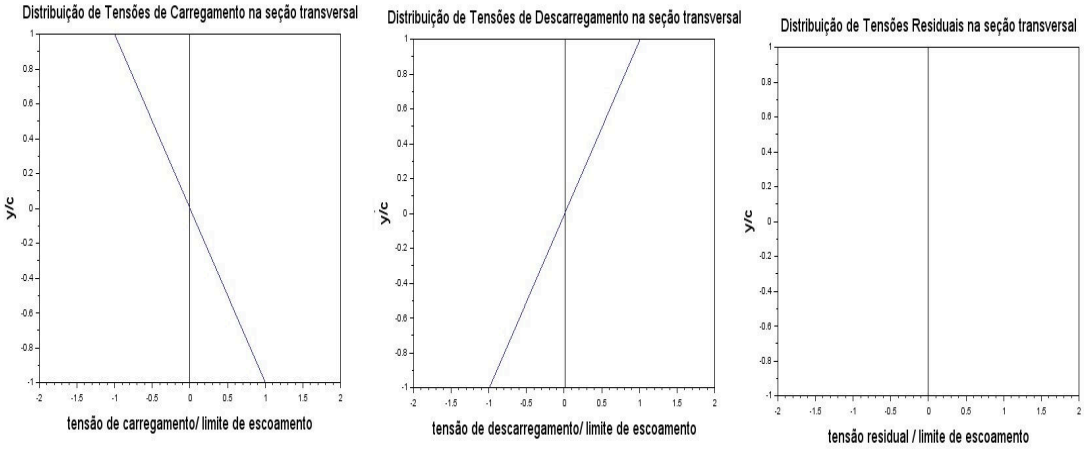
A Fig. VI-1.b apresenta o descarregamento elástico da estrutura. É importante ressaltar que, como visto anteriormente, até gerar a 1ª rótula em *B*, a estrutura comporta-se como uma viga biengastada. Com isso, seu descarregamento elástico será idêntico ao carregamento elástico da estrutura original antes da rótula. Esse fato explica o não surgimento das tensões residuais, o que é mostrado na Fig. VI-1.c.



(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-1 – Tensões na seção *A* para o primeiro carregamento crítico P_1

A Fig. VI-2 apresenta a distribuições de tensões na seção transversal *C* para aplicação da citada força. A análise dessa figura é análoga à análise da figura VI-1. O descarregamento é elástico, mostrado na Fig.VI-2.b e não são geradas tensões residuais na Fig.VI-2.c, cuja a explicação comportamento é idêntico ao explicado para Fig.VI-1.c.

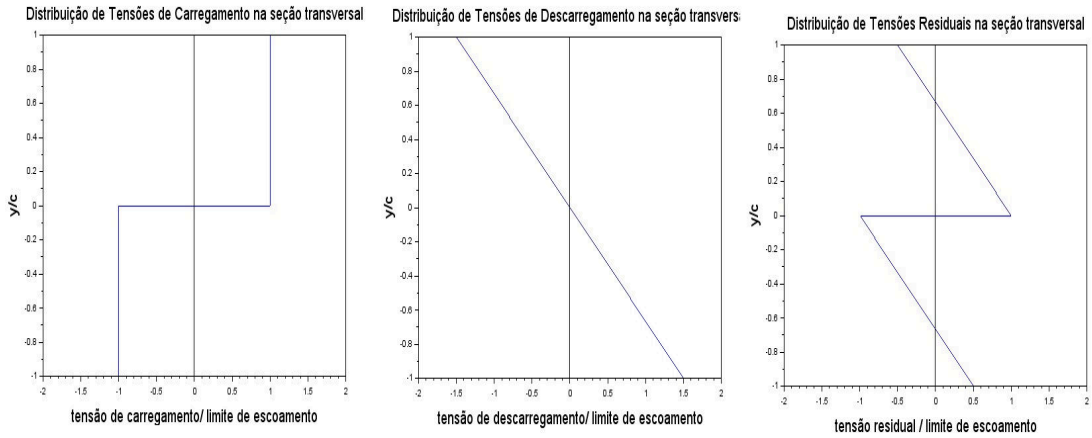


(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-2 – Tensões na seção *C* para o primeiro carregamento crítico P_1

Por fim, a seção *B* sofreu plastificação completa e passa a não resistir mais a novos incrementos de momentos fletores, conforme Fig.VI-3.a. Contudo, ao sofrer o descarregamento elástico, dado pela Fig. VI-3.b, a seção transversal passa a apresentar tensões residuais conforme Fig. VI-3.c.

Pode-se observar, ainda na Fig. VI-3.c, que as tensões residuais no interior da seção transversal *B* são maiores do que as tensões residuais na porção mais externa da seção. Levando-se em conta que a maior parte das formas de se medir experimentalmente as tensões residuais é baseada em métodos de medição superficial, tensões residuais maiores no interior da seção transversal podem levar a conclusões não conservativas.



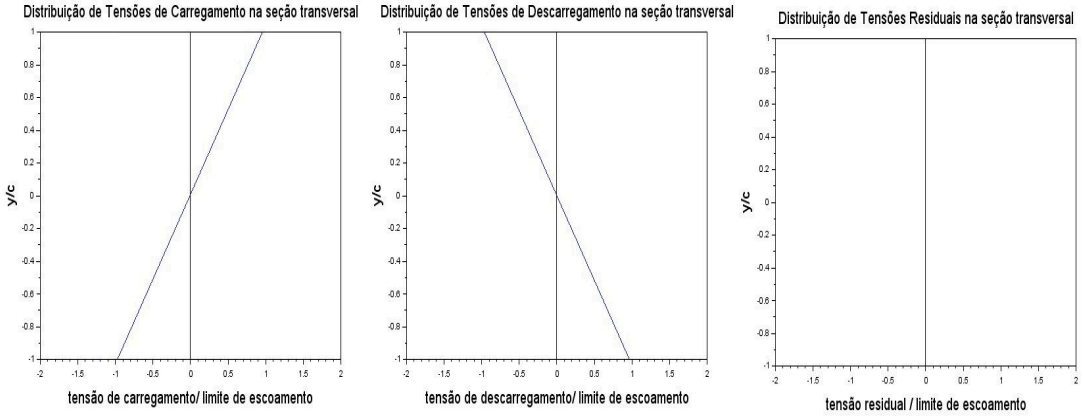
(a) (b) (c)

Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-3 – Tensões na seção *B* para o primeiro carregamento crítico P_1

VI.2 Análise de Tensões Residuais para um carregamento entre a 1ª e a 2ª rótulas (P_{12}), seguido de descarregamento elástico

Para uma carga intermediária entre a geração da primeira e a geração da segunda rótula, por exemplo $P_{12} = (P_1 + P_2)/2$, a seção *A* ainda não alcançou o momento fletor de início de escoamento. Assim, toda a deformação é totalmente elástica, conforme Fig. VI-4.a. Como o descarregamento é elástico, a tensão residual na seção transversal é nula (Fig. VI-4.c).

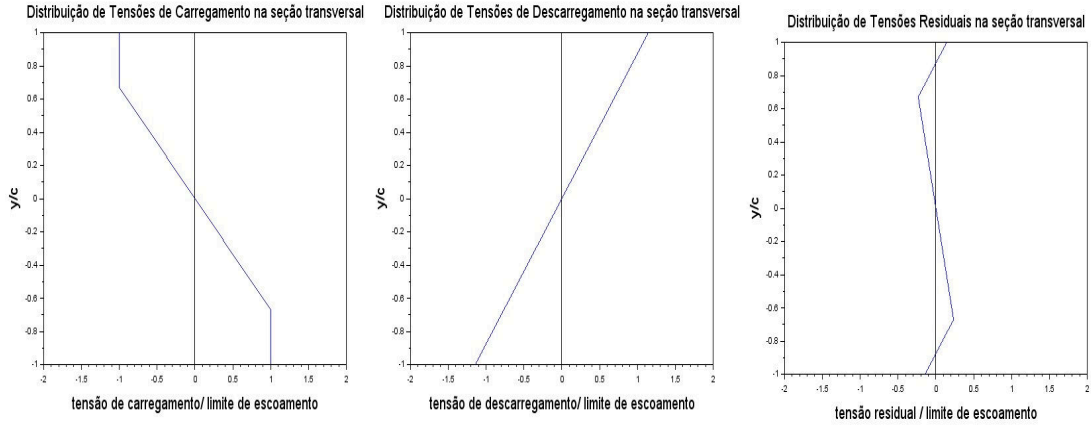


(a) (b) (c)

Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-4 – Tensões na seção *A* para carregamento entre P_1 e P_2

Como visto anteriormente, incrementos de carga além P_1 fará com que a seção transversal *C* experimente tensões plásticas durante o carregamento, que fica evidenciado na Fig. VI-5.a. As tensões residuais dessa seção, apresentadas na Fig. VI-5.c, já são perceptíveis.

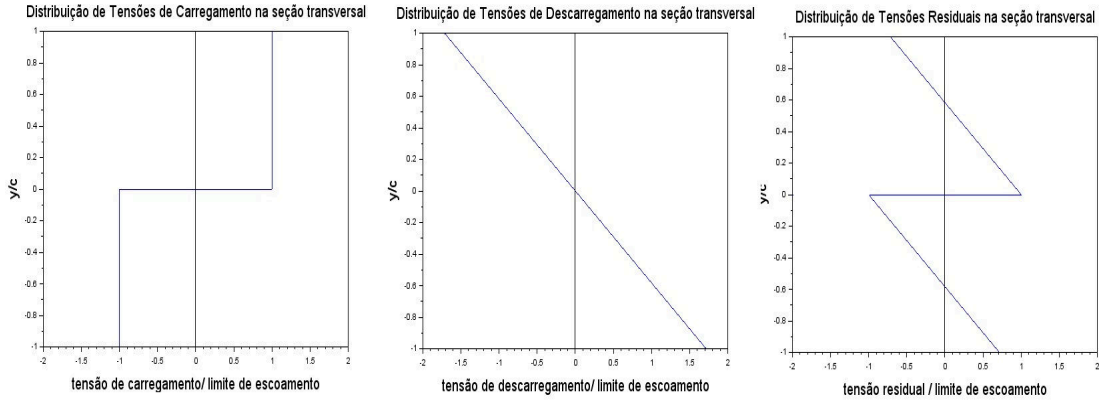


(a) (b) (c)

Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-5 – Tensões na seção *C* para carregamento entre P_1 e P_2

A seção *B* continua completamente plastificada, conforme Fig. VI-6.a, e após o seu descarregamento mostrado na Fig. VI-6.b, gera-se a distribuição das tensões residuais mostrado na Fig. VI-6.c.



(a) (b) (c)

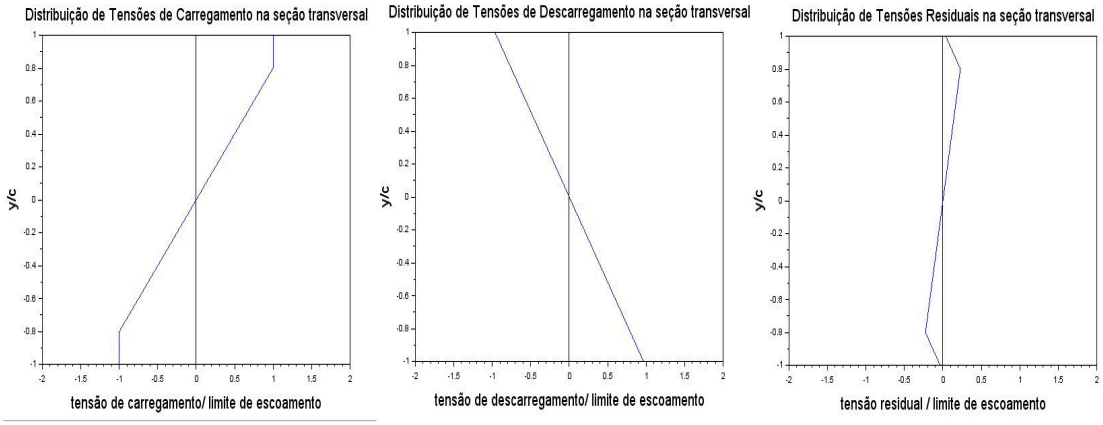
Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-6 – Tensões na seção *B* para carregamento entre P_1 e P_2

VI.3 Análise de Tensões Residuais para o carregamento P_2, seguido de descarregamento elástico

Considerando P_2 como a carga necessária para gerar a 2ª rótula (na seção transversal *C*), são mostradas as distribuições de tensões durante o carregamento, descarregamento elástico e tensões residuais resultantes nas seções *A*, *B* e *C*.

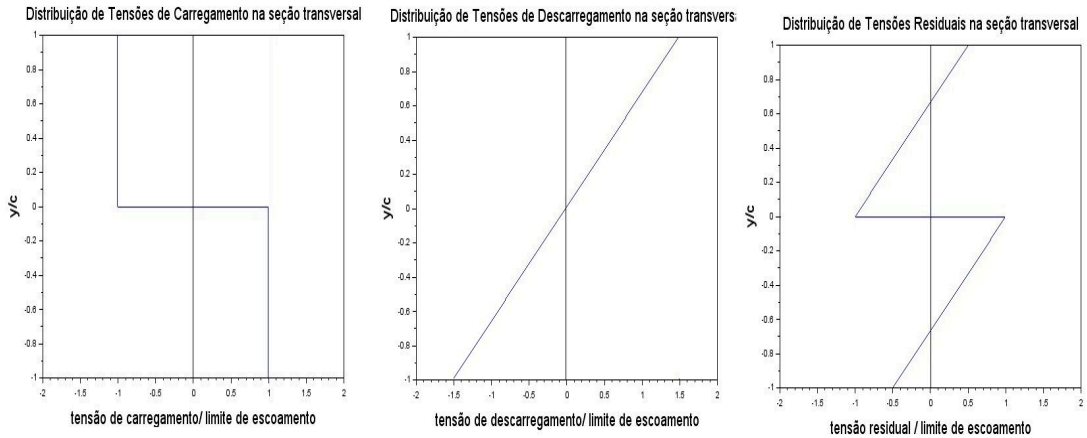
Conforme já mencionado, das 3 seções selecionadas, apenas a seção *A* não alcança o momento fletor plástico durante o carregamento P_2. Contudo, a seção já ultrapassou o momento fletor de início de escoamento M_y, ou seja, apresenta certa deformação plástica, conforme observado na Fig. VI-7.a. Após o descarregamento elástico, a distribuição de tensões residuais é dada pela Fig. VI-7.c.



(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-7 – Tensões na seção *A* para o segundo carregamento crítico P_2

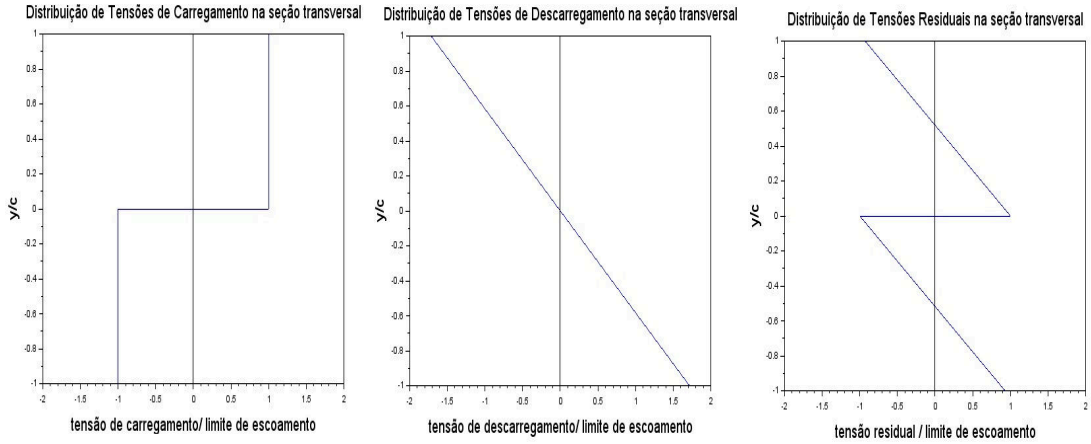
A distribuição de tensões de carregamento, descarregamento e tensões residuais nas seções *C* e *B*, para a citada carga, estão representadas respectivamente pelas Fig. VI-8 e Fig.VI-9.



(a) (b) (c)

Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-8 – Tensões na seção *C* para o segundo carregamento crítico P_2



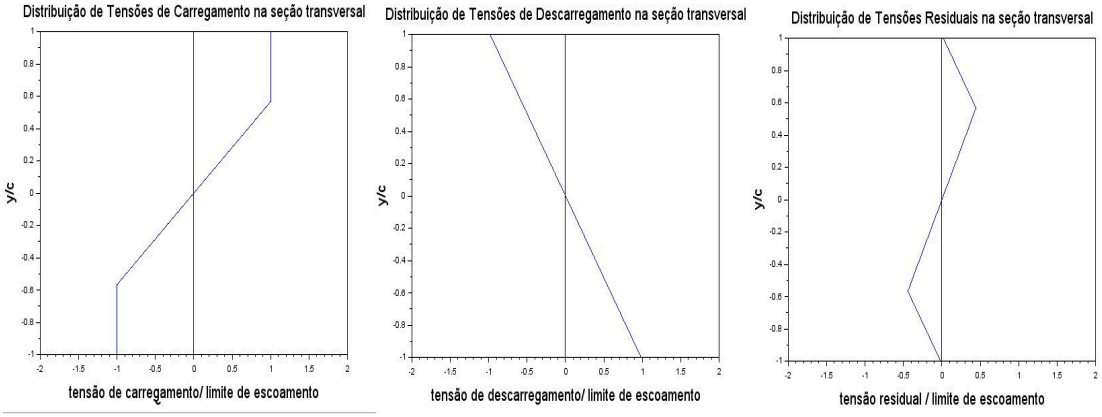
(a) (b) (c)

Tensões de Carregamento Tensões de Descarregamento Tensões Residuais

Figura VI-9 – Tensões na seção *B* para o segundo carregamento crítico P_2

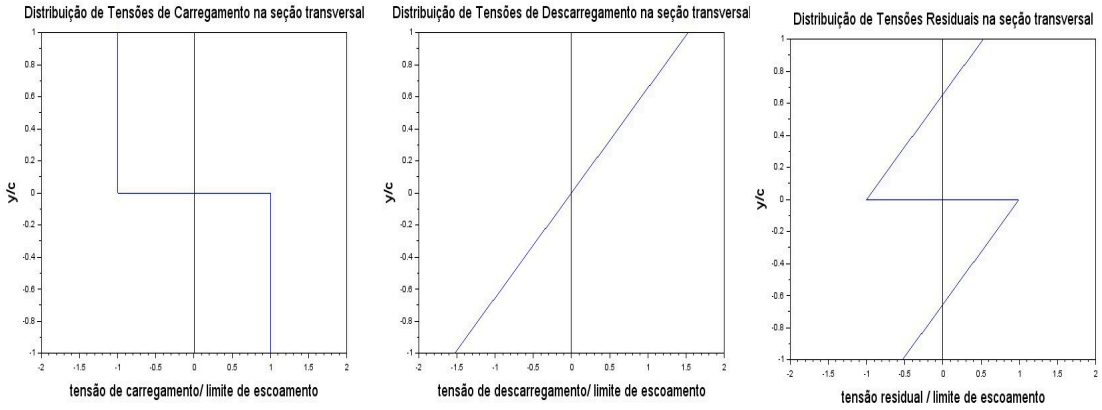
VI.4 Análise de Tensões Residuais para um carregamento entre a 2ª e a 3ª rótulas (P_{23}), seguido de descarregamento elástico

Realizando procedimentos análogos aos descritos nos itens anteriores, os diagramas de tensão de carregamento, descarregamento elástico e das tensões residuais das seções transversais *A*, *C* e *B*, para por exemplo $P_{23} = (P_2 + P_3)/2$ são mostrados nas Fig. VI-10, VI-11 e VI-12.



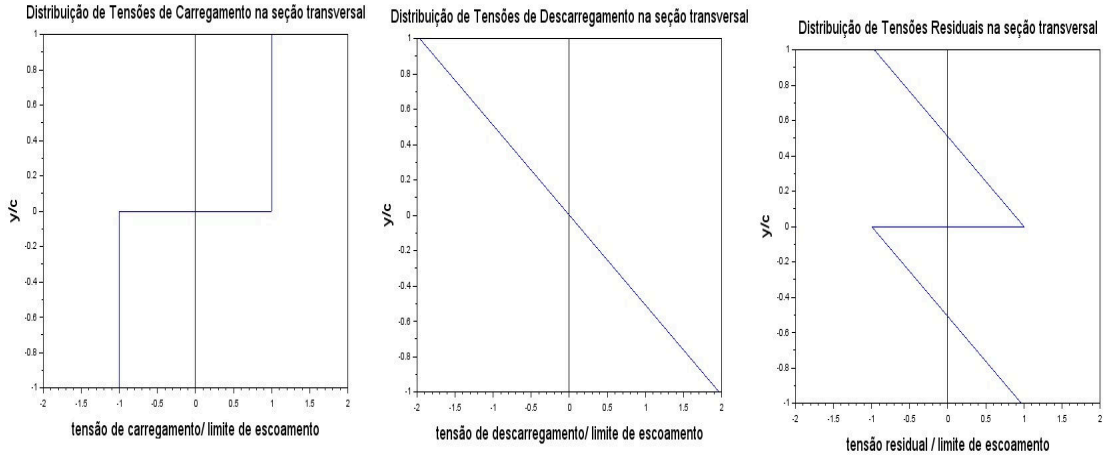
(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-10 – Tensões na seção *A* para carregamento entre P_2 e P_3



(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-11 – Tensões na seção *C* para carregamento entre P_2 e P_3

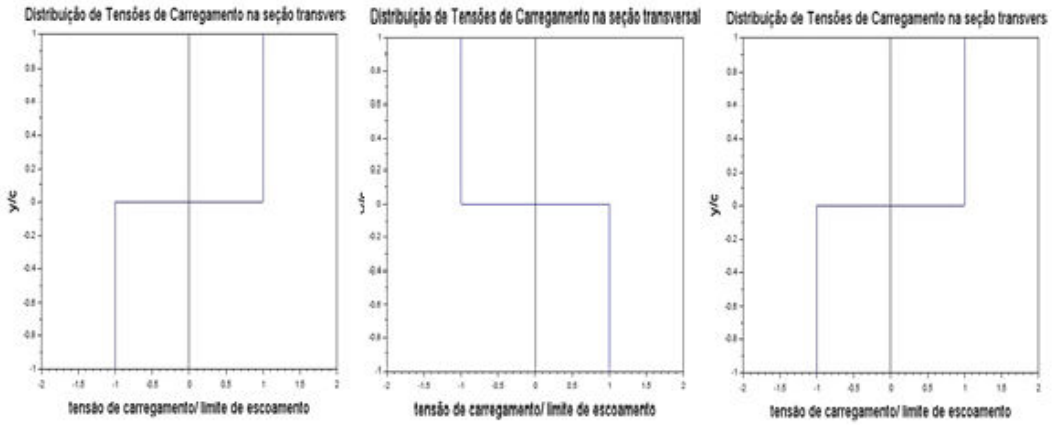


(a) Tensões de Carregamento (b) Tensões de Descarregamento (c) Tensões Residuais

Figura VI-12 – Tensões na seção *B* para carregamento entre P_2 e P_3

VI.5 Análise da distribuição de tensões para o carregamento crítico da estrutura (P_3)

Sendo P_3 a carga necessária para gerar a 3ª rótula (na seção transversal A) e, por consequência, a carga crítica da viga binesgastada, a Fig. VI-13 mostra a distribuição de tensões nas seções transversais A, B e C durante o carregamento.



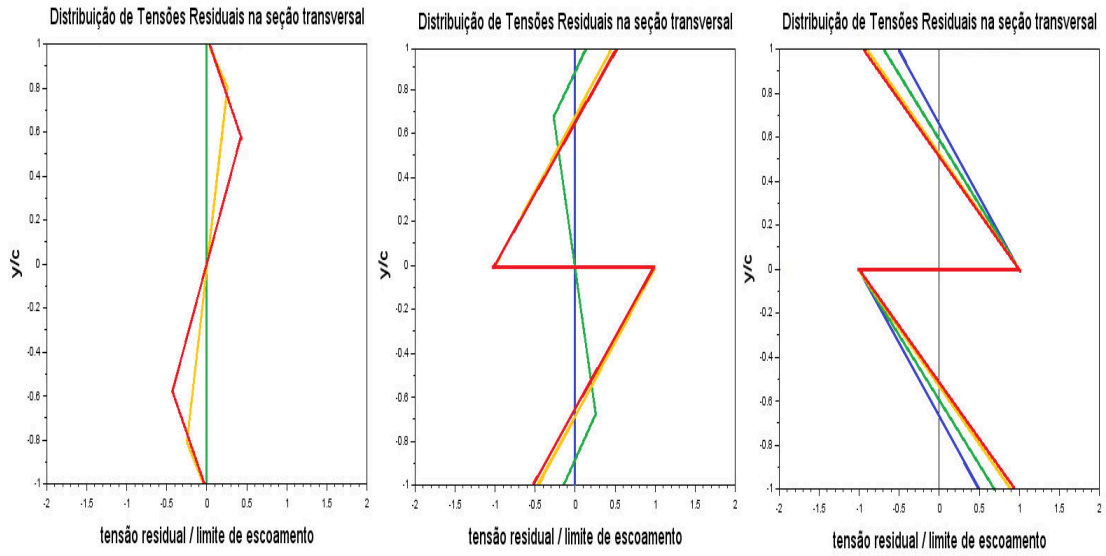
(a) (b) (c)

Figura VI-13 – Tensões nas seções: (a) A, (b) C e (c) B para carregamento P_3

VI.6 Análise da distribuição de tensões residuais para cada seção transversal para a variação de carga

Diante do exposto até este ponto, é possível comparar a distribuição das tensões residuais geradas nos carregamentos estudados em cada seção transversal: *A*, *B* e *C*. Na Fig. VI-14.a, tem-se a distribuição de tensões residuais relativa a sequência dos carregamentos para a seção transversal A. Pode- se observar na cor azul as tensões residuais para o carregamento P_1. Em verde, têm-se a distribuição das tensões residuais para o carregamento P_{12}. Em amarelo e vermelho, as tensões residuais geradas para P_2 *e* P_{23}, respectivamente. Note que as retas azul e verde se sobrepõem para a seção *A*, já que as tensões residuais são nulas nos 2 casos.

Nas Fig.VI-14.b e VI-14.c, tem-se a sequência de distribuição de tensões residuais para as seções *C* e *B*, respectivamente.



(a) (b) (c)

Seção *A* Seção *C* Seção *B*

Figura VI-14 – Resumo da distribuição das tensões residuais para diferentes carregamentos em diferentes seções transversais

Observando-se os resultados da Fig. VI-14 pode-se perceber que de acordo com a seção transversal analisada (*A*, *B* ou *C*), as distribuições de tensões residuais seguem

padrões distintos. A primeira seção transversal a gerar rótula plástica (seção *B*) apresenta um comportamento de pequenas mudanças na distribuição das tensões residuais, em função de desde P_1 já ter plastificado toda a sua seção transversal. Já a segunda seção transversal a gerar rótula plástica (seção *C*) apresenta um comportamento misto, pois até P_2 não tinha ainda gerado a rótula plástica. Já a terceira seção transversal a gerar rótula plástica (seção *A*) apresenta distribuições de tensões residuais relativas a plastificações parciais de sua seção transversal, mas não chega a mostrar o efeito da plastificação total de sua seção transversal, pois ao atingir P_3 a estrutura já falha.

Nota-se ainda que na maioria dos carregamentos das seções transversais analisadas as tensões residuais foram maiores no interior das seções transversais do que em suas faces externas, o que as torna mais críticas uma vez que os métodos usuais de medição de tensões residuais concentram-se em medições superficiais.

No próximo capítulo as conclusões deste trabalho são apresentadas.

Capítulo VII – Conclusões

Devido à capacidade de gerar uma quantidade definida de rótulas plásticas sem que entre em colapso, as estruturas hiperestáticas têm a capacidade de suportar cargas superiores às cargas críticas de estruturas estáticas semelhantes.

A solução analítica apresentada permite prever a distribuição de tensões residuais em seções transversais de estruturas hiperestáticas sujeitas a carregamentos transversais, para materiais elásticos-perfeitamente plásticos.

No caso apresentado, foram estudados os comportamentos das seções transversais nos dois engastes e no ponto de aplicação da força concentrada em uma viga biengastada para uma sucessão crescente de cargas. A medida que a carga foi crescendo, a estrutura hiperestática sofreu plastificações completas de certas seções transversais, gerando rótulas plásticas, e modificando sua configuração durante o carregamento.

Para analisar esta evolução, o método incremental de análise elasto-plástica foi utilizado. Este método permite estimar a distribuição de momentos fletores para cada seção transversal da estrutura e a consequente distribuição de tensões no interior dessas seções transversais para cada carga aplicada. Na viga biengastada estudada, foram geradas 3 rótulas plásticas até o colapso da estrutura. Assim, foram estimadas as distribuições de tensões residuais para cada carga geradora de rótulas, assim como cargas intermediárias entre as mesmas. Conforme mostrado, a distribuição de tensões residuais varia consideravelmente dependendo do carregamento e da seção transversal analisada.

Finalmente, este estudo da distribuição de tensões residuais em estruturas hiperestáticas procurou estender o conhecimento do comportamento de estruturas parcialmente plastificadas, que de uma forma geral têm sido abordadas majoritariamente para estruturas estáticas.

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões, pode-se realizar a simulação por Elementos Finitos de carregamentos e descarregamentos da estrutura biengastada apresentados no presente trabalho e também fazer ensaios experimentais do mesmo.

Pode-se estudar a distribuição de tensões residuais nas seções transversais em estruturas sujeitas a sequências de carregamentos e descarregamentos sucessivos de diferentes valores de cargas concentradas.

Adicionalmente, estender a teoria apresentada para componentes que apresentem forças normais às suas seções transversais, onde as tensões geradas no carregamento, no descarregamento e residuais não seriam nulas na linha neutra das seções transversais, o que modificaria consideravelmente a descrição da distribuição de tensões residuais em seções transversais dos mesmos.

Referências Bibliográficas

[1] BEER, F. P; JOHNSTON, E. P., "Mecânica dos Materiais", 7ª edição, São Paulo, 2015.

[2] ASM, 2002, (American Society for Metals) Residual Stress and Deformation of Steel Handbook.

[3] PACHECO, P.M.C.L., KENEDI, P.P., Jorge, J.C.F and Paiva, A.M.C., "Analysis of the influence of mechanical properties on the residual stress in offshore chain links using the finite element method". Proceedings of OMAE 2003 conference, Cancun, Mexico, 2003.

[4] HIBBELER, R. C. "Resistência dos Materiais". 7ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

[5] GORROCHATEGUI, I.; GUTIÉRREZ-SOLANA, F. A method for assessment of hyperstatic cracked structures in the elastic-plastic regime. *Pergamon*, Santander, Espanha. Engineering Fracture Mechanics 61, 519-535. 1998.

[6] OKANO, S.; MOCHIZUKI, M. Transient distortion behavior during TIG welding of thin steel plate. Elsevier – Journal of Materials Processing Technology 241, Japão, p. 103-111, nov. 2016.

[7] WANG, Q.; LIU, Z.; WANG, P. Numerical simulation of residual stress in 10Ni5CrMoV steel weldments. Elsevier – Journal of Materials Processing Technology 240, China, p. 77-86, set. 2016.

[8] TOUSSAINT, E.; DURIF, S.; BOUCHAIR, A. Strain measurements and analyses around the bolt holes of structural steel plate connections using full-field measurements. Elsevier – Engineering Structures, França, p.148-162, nov.2016.

[9] BUCHANAN, D.J.; JOHN, R. Residual stress redistribution in shot peened samples subject to mechanical loading. Elsevier – Materials Science e Engineering A 615, p. 70-78, Estados Unidos, jul. 2014.

[10] ACHINTHA, M.; NOWELL, D.; SHAPIRO, S. Eigenstrain modelling of residual stress generated by arrays of laser shock peening shots and determination of the complete stress field using limited strain measurements. Elsevier – Surface e coating technology 216, p. 68-77, Reino Unido, nov. 2012.

[11] FOSS, B.J.; GRAY S.; STEKOVIC, S., Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000. Elsevier – Acta Materialia 61, p. 2548-2559, Reino Unido, fev. 2013.

[12] RADZIEJEWSKA, J.; MOCKO, W.; SARZYNSKI, A. Analysis of the plastic deformation of AISI 304 steel induced by the nanosecond laser pulse. Elsevier – Optics e laser technology, Polônia, p. 165-173, nov. 2016.

[13] JIANG, J.; CHIEW, S.P.; LEE,C.K. An experimental study on residual stresses of high strength steel box columns. J*ournal of Constructional Steel Research*. Singapura, p. 12-21, nov. 2016.

[14] LI, M.; XU, S.; YANG, Y.; TONG, J. 3D simulation model of corn stubble cutting using finite element method. *Elsevier - Soil e Tillage Research*, China, p. 43-51, out. 2016.

[15] HTOO, A.T.; MIYASUITA, Y., MUTOH, Y. Notch fatigue behavior of Ti-6Al-4V alloy in transition region between low and high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, Japão, p. 194-203, out. 2016.

[16] XIE, X.; JIANG, W,; GONG, J. A model to predict the relaxation of weld residual stress by cyclic load: Experimental and finite element modeling. Elsevier – International Journal of Fatigue 95, China, p.293-301, nov. 2016.

[17] VROUWENVELDER, A.C., "The plastic behaviour and the calculation of beams and frames subjected to bending", Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Technical University Delft. Holanda. 2003.

[18] MC ROBIE, A.; BAKER, C.; KONSTANTATOU, N. Mechanisms and states of self-stress of planar trusses using graphic statics, part II: Applications and extensions. *International Journal of Space Structures31,p. 102-111.* Reino Unido, 2016.

[19] DASSIOS, I.; JIVKOV, A.P.; ABU-MUHARIB, A. A mathematical model for plasticity and damage: A discrete calculus formulation. Elsevier - Journal of Computational and Applied Mathematics 312. Reino Unido, p. 27-38, ago. 2015.

[20] CAPRANI, C. "Plastic Analysis – Structural Engineering". Faculty of Engineering, Monash University, Melbourne – Austrália. 2011.

[21] BIN, J.; WANJI, C. A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: Theory and applications. Elsevier – International Journal of Solids and Structures 47. China, p. 779-785, nov 2009.

[22] STOK, B.; HALILOVIC, M. Analytical solutions inelasto-plastic bending of beams with rectangular cross section. Elsevier – Applied Mathematical Modelling 33, p. 1749-1760, abr. 2008.

[23] LOPES, Diego Garcia; "Avaliação das tensões residuais na montagem de conectores em armaduras de tração de dutos flexíveis", dissertação de mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2013.

[24] KUDZYS, A., KLIUKAS, R.,; "On design features of propped and unpropped hyperstatic structures". Journal of Civil Engineering and Management, 13:2, 123-129. 2007.

[25] ARAÚJO, A.F., "Redistribuição de momentos em vigas contínuas em aduelas protendidas com cabos sintéticos externos", tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2003.

[26] RONDEAUX, J.F., ZASTAVNI, D.; "Limit state analysis of historical structures using graphic statics related to the Principle of Virtual Works". Proceedings of SAHC conference, Louvain-la-Neve, Bélgica, 2016.

[27] CASTRO, J.T, MEGGIOLARO, M.A, "Fadiga – Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço. Volume 1- Iniciação de Trincas", 2009.

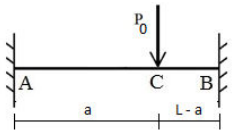
[28] BUDYNAS, R., NISBETT, J."Elementos de Máquinas de Shigley – Projeto de Engenharia Mecânica" 8ª edição, 2011.

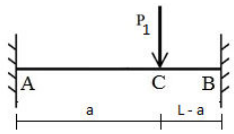
[29] OGATA, Humberto Toshiaki da Silva; "Determinação da influência das tensões residuais nas propriedades de fadiga em aço SAE 8620 processado com diferentes profundidades de camada de cementação", dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, 2003.

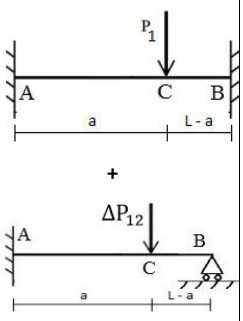
[30] HSU, T., SHIAO, S.; "Experimental Study of pseudo-local flexibility method for damage detection of hyper-static beam." 7th European Workshop on Structural Health Monitoring, Nantes, França, 2014.

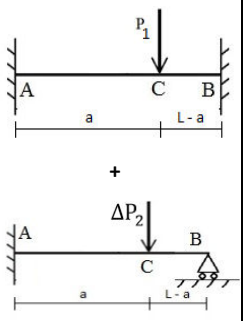
[31] RONDEAUX, J.F., ZASTAVNI, D.; "Graphical limit state analysis of hyperstatic structures". Proceedings of the IASS Annual Symposium. Tóquio, Japão, 2016.

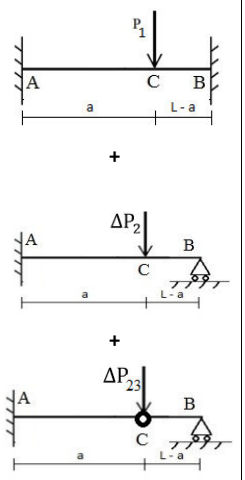
APÊNDICE A

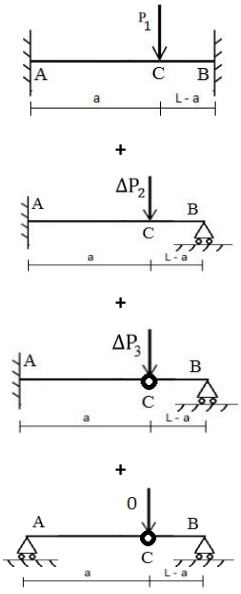
Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P_0 < P_1$		$M_{B_0} = \frac{P_0\, a^2(L-a)}{L^2}$ $R_{B_0} = \frac{P_0\, a^2(3L-2a)}{L^3}$ $M_{A_0} = \frac{P_0\, a\,(L-a)^2}{L^2}$ $R_{A_0} = P_0\, \frac{(L-a)^2(L+2a)}{L^3}$	$M_0(x) = -M_{A_0} + R_{A_0}\, x$ para $0 \le x \le a$ $M_0(x) = -M_{A0} + R_{A0}\, x - (x-a)P_0$ para $a \le x \le L$	-	(nota 2)

Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P = P_1$		$M_{B_1} = \frac{P_1\, a^2(L-a)}{L^2}$ $R_{B_1} = \frac{P_1\, a^2(3L-2a)}{L^3}$ $M_{A_1} = \frac{P_1\, a\,(L-a)^2}{L^2}$ $R_{A_1} = P_1\, \frac{(L-a)^2(L+2a)}{L^3}$	$M_1(x) = -M_{A_1} + R_{A_1}\, x$ para $0 \le x \le a$ $M_1(x) = -M_{A1} + R_{A1}\, x - (x-a)P_1$ para $a \le x \le L$	$Até\ M_B = S_y bc^2$ $P_1 = \frac{M_P L^2}{a^2(L-a)}$	(nota 2)

Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P_1 < P_{12} < P_2$		Obs: $P_{12} = P_1 + \Delta P_{12}$ $\Delta R_{A_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^3}\,(2L^3 - 3aL^2 + a^3)$ $\Delta M_{A_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^2}\, a(2L^2 - 3aL + a^2)$ $\Delta R_{B_{12}} = \frac{\Delta P_{12}}{2L^3}\, a^2(3L-a)$	Incremento: $\Delta M_{12}(x) = -\Delta M_{A_{12}} + \Delta R_{A_{12}}\, x$ para $0 \le x \le a$ $\Delta M_{12}(x) = -\Delta M_{A_{12}} + \Delta R_{A_{12}}\, x - \Delta P_{12}(x-a)$ para $a \le x \le L$ Total: $M_{12}(x) = M_1(x) + \Delta M_{12}(x)$ (nota 1)	--	(nota 2)

Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P = P_2$		Obs: $P_2 = P_1 + \Delta P_2$ $\Delta R_{A_2} = \frac{\Delta P_2}{2L^3}(2L^3 - 3aL^2 + a^3)$ $\Delta M_{A_2} = \frac{\Delta P_2}{2L^2} a(2L^2 - 3aL + a^2)$ $\Delta R_{B_2} = \frac{\Delta P_2}{2L^3} a^2(3L - a)$	Incremento: $\Delta M_2(x) = -\Delta M_{A_2} + \Delta R_{A_2} x$ para $0 \le x \le a$ $\Delta M_2(x) = -\Delta M_{A_2} + \Delta R_{A_2} x - \Delta P_2(x - a)$ para $a \le x \le L$ Total: $M_2(x) = M_1(x) + \Delta M_2(x)$ (nota 1)	$Até\ M_C = M_p = S_y bc^2$ $P_2 = M_p \frac{L^2(L + 3a)}{a^2(L - a)(3L - a)}$ $\Delta P_2 = M_P \frac{(2a - L)2L^2}{a^2(L - a)(3L - a)}$	(nota 2)

Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P_2 < P_{23} < P_3$		Obs: $P_{23} = P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_{23}$ $\Delta R_{A_{23}} = \Delta P_{23}$ $\Delta R_{B_{23}} = 0$ $\Delta M_{A_{23}} = a\,\Delta P_{23}$	Incremento: $\Delta M_{23}(x) = -\Delta M_{A_{23}} + \Delta R_{A_{23}} x$ para $0 \le x \le a$ $\Delta M_{23}(x) = -\Delta M_{A_{23}} + \Delta R_{A_{23}} x - \Delta P_{23}(x - a)$ para $a \le x \le L$ Total: $M_{23}(x) = M_1(x) + \Delta M_2(x) + \Delta M_{23}(x)$ (nota 1)	--	(nota 2)

Carga	Composição da Estrutura	Reações para estrutura	Momento Incremental E Momento Total	Carga crítica	Descarre-gamento
$P = P_3$		Obs: $P_3 = P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$ $\Delta R_{A_3} = \Delta P_3$ $\Delta R_{B_3} = 0$ $\Delta M_{A_3} = a\ \Delta P_3$	Incremento: $\Delta M_3(x) = -\Delta M_{A_3} + \Delta R_{A_3}\ x$ para $0 \le x \le a$ $\Delta M_3(x) = -\Delta M_{A_3} + \Delta R_{A_3}\ x$ $-\Delta P_3(x - a)$ para $a \le x \le L$ Total: $M_3(x) = M_1(x) + \Delta M_2(x)$ $+ \Delta M_3(x)$ (nota 1)	$At\acute{e}\ M_A = S_y bc^2$ $P_3 = \frac{2M_p L}{a(L-a)}$ $\Delta P_3 = M_p \left(-\frac{L(L-2a)}{a^2(3L-a)}\right)$	COLAPSO não pode haver descarre-gamento

Nota 1: As reações de apoio podem ser obtidas por procedimento análogo ao descrito na equação acima

Nota 2: Todo o descarregamento elástico ocorre conforme composição inicial (viga bi engastada). Assim, os momentos de descarregamento são dados pela equação abaixo, para qualquer carga P_n (carga total do carregamento):

$$M_{desc}(x) = M_{A_{desc}} - R_{A_{desc}}\ x \quad , \qquad \text{para } 0 \le x \le a$$

$$M_{desc}(x) = -M_{B_{desc}} + R_{B_{desc}}(L - x) \quad , \qquad \text{para } a \le x \le L$$

$$M_{B_{desc}} = \frac{P_n\ a^2(L-a)}{L^2}$$

$$R_{B_{desc}} = \frac{P_n\ a^2(3L-2a)}{L^3}$$

$$M_{A_{desc}} = \frac{P_n\ a\ (L-a)^2}{L^2}$$

$$R_{A_{desc}} = P_n\ \frac{L^3 - 3a^2L + 2a^3}{L^3}$$